Alcuni problemi di Teoria dei Giochi

Graziano Gentili

Dipartimento di Matematica e Informatica "U.Dini"
Università di Firenze

gentili@math.unifi.it

Rovereto - 1 ottobre 2015

Gioco delle due ditte
DUOPOLIO

Città

Ditta 1
Decision-Maker 1

Ditta 2
Decision-Maker 2

***Presupposti*:**

- le due ditte producono lo stesso bene;
- entrambe le ditte hanno come unico scopo il massimo profitto possibile;
- hanno la stessa flessibilità sui prezzi e possono scegliere o "prezzo basso" o "prezzo alto";
- il mercato è di misura fissata nel senso che la quantità di prodotto venduto è costante
- se entrambe le ditte scelgono "prezzo alto" guadagnano 1000 Euro ciascuna al giorno, se entrambe scelgono "prezzo basso" ne guadagnano invece 600. Se una delle due sceglie "prezzo alto" e l'altra "prezzo basso" quella che ha scelto il prezzo più basso guadagna 1200 Euro mentre l'altra subisce una perdita di 200 Euro.

$\mathcal{A}$ = insieme delle ***decisioni*** =

= { prezzo alto, prezzo basso}

$\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ = insieme *situazioni di mercato*

= { (prezzo alto, prezzo alto) ,
(prezzo basso, prezzo basso),
(prezzo alto, prezzo basso),
(prezzo basso, prezzo alto) }

Situazione di mercato	*Profitto Ditta 1*	*Profitto Ditta 2*
(prezzo alto, prezzo alto)	1000 Euro	1000 Euro
(prezzo basso, prezzo basso)	600 Euro	600 Euro
(prezzo basso, prezzo alto)	1200 Euro	-200 Euro
(prezzo alto, prezzo basso)	-200 Euro	1200 Euro

$\mathcal{P}_1$ = insieme delle *Preferenze* della Ditta 1 =

= { (prezzo basso, prezzo alto) >
(prezzo alto, prezzo alto) >
(prezzo basso, prezzo basso) >
(prezzo alto, prezzo basso) }

$\mathcal{P}_2$ = insieme delle *Preferenze* della Ditta 2 =

= { (prezzo alto, prezzo basso) >
(prezzo alto, prezzo alto) >
(prezzo basso, prezzo basso) >

Analisi senza tempo

Le due ditte sono obbligate a mantenere fissi i prezzi per un biennio.

- Ditta 1

Se la Ditta 2 sceglie "prezzo alto" $\Rightarrow$ sceglie "prezzo basso"
Se la Ditta 2 sceglie "prezzo basso" $\Rightarrow$ sceglie "prezzo basso"
Qualunque sia la scelta della Ditta 2 il titolare della Ditta 1 sceglie "prezzo basso"

- Ditta 2

Se la Ditta 1 sceglie "prezzo alto" $\Rightarrow$ sceglie "prezzo basso"
Se la Ditta 1 sceglie "prezzo basso" $\Rightarrow$ sceglie "prezzo basso"
Qualunque sia la scelta della Ditta 1 il titolare della Ditta 2 sceglie "prezzo basso"

Si trova quindi la situazione (prezzo basso, prezzo basso)

Situazione Speciale :
(prezzo basso, prezzo basso)

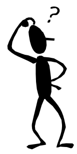
		DITTA 2	
		PB	PA
DITTA 1	PB	(600, 600)	(1200, -200)
	PA	(-200, 1200)	(1000, 1000)

B o S

Bach

Stravinsky

Persona 1
Giocatore Bach



Persona 1
Giocatore Stravinsky

***Presupposti*:**

- due persone vogliono andare insieme ad un concerto, hanno due possibilità: decidere di andare ad un concerto di Bach oppure ad uno di Stravinsky;
- uno di loro preferisce Bach e l'altro invece Stravinsky;
- se non andranno allo stesso concerto saranno comunque scontenti come se assistessero al concerto del loro compositore non preferito.

$\mathcal{A}$ = insieme delle ***mosse*** =
= { Bach , Stravinsky }

$\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ = insieme dei ***profili di gioco*** =
= { (Bach , Stravinsky) ,
(Stravinsky , Bach),
(Stravinsky , Stravinsky),
(Bach , Bach) }

$\mathcal{P}_B$ = insieme delle ***Preferenze*** del Giocatore Bach =
= { (Bach , Bach) > (Stravinsky , Stravinsky) >
> (Bach , Stravinsky) = (Stravinsky , Bach) }

$\mathcal{P}_S$ = insieme delle ***Preferenze*** del Giocatore Stravinsky =
= { (Stravinsky , Stravinsky) > (Bach , Bach) >
> (Stravinsky , Bach) = (Bach , Stravinsky) }

Funzioni indicatrici

- Giocatore Bach

$\mathbf{U_B} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathbf{U_B}$ (Bach , Bach) = 2

$\mathbf{U_B}$ (Stravinsky , Stravinsky) = 1

$\mathbf{U_B}$ (Bach , Stravinsky) = $\mathbf{U_B}$ (Stravinsky , Bach) = 0

- Giocatore Stravinsky

$\mathbf{U_S} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathbf{U_S}$ (Stravinsky , Stravinsky) = 2

$\mathbf{U_S}$ (Bach , Bach) = 1

$\mathbf{U_S}$ (Stravinsky , Bach) = $\mathbf{U_S}$ (Bach , Stravinsky) = 0

Profilo di gioco	*Valore di* U_B	*Valore di* U_S
(Bach , Bach)	2	1
(Stravinsky , Stravinsky)	1	2
(Bach , Stravinsky)	0	0
(Stravinsky , Bach)	0	0

Tabella

		Giocatore Stravinsky	
		BACH	**STRA-**
Giocatore Bach	**BACH**	(2 , 1)	(0 , 0)
	STRAVINSKY	(0 , 0)	(1 , 2)

Situazioni speciali : (Bach , Bach) e (Stravinsky , Stravinsky)

Matching Pennies

Persona 1
Giocatore 1

Persona 2
Giocatore 2

Presupposti:

- due persone scelgono contemporaneamente se mostrare "testa" o "croce" di una moneta;
- se mostrano la stessa faccia la persona 2 paga alla persona 1 la cifra di 1 Euro ;
- se mostrano invece due facce diverse la persona 1 paga alla persona 2 la cifra di 1 Euro ;
- ogni persona si preoccupa soltanto di vincere il più possibile.

$\mathcal{A}$ = insieme delle ***mosse*** =
= { testa, croce }

$\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ = *profili di gioco* =

= { (testa, croce) , (croce, testa) ,

(croce, croce) , (testa, testa) }

Profilo di gioco	*Vincita Giocatore 1*	*Vincita Giocatore 2*
(testa, croce)	- 1 Euro	+ 1 Euro
(croce, testa)	- 1 Euro	+ 1 Euro
(croce, croce)	+ 1 Euro	- 1 Euro
(testa, testa)	+ 1 Euro	- 1 Euro

$\mathcal{P}_1$ = insieme delle *Preferenze* del Giocatore 1 =

= { (testa, testa) = (croce, croce) >

> (testa, croce) = (croce, testa) }

$\mathcal{P}_2$ = insieme delle *Preferenze* del Giocatore 2 =

= { (testa, croce) = (croce, testa) >

> (testa, testa) = (croce, croce) }

Funzioni indicatrici

- Giocatore 1

$\mathbf{U_1} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathbf{U_1}$ (croce, croce) = $\mathbf{U_1}$ (testa, testa) = 1

$\mathbf{U_1}$ (testa, croce) = $\mathbf{U_1}$ (croce, testa) = - 1

- Giocatore 2

$\mathbf{U_2} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathbf{U_2}$ (testa, croce) = $\mathbf{U_2}$ (croce, testa) = 1

$\mathbf{U_2}$ (croce, croce) = $\mathbf{U_2}$ (testa, testa) = - 1

Tabella

		GIOCATORE 2	
		TESTA	**CROCE**
GIOCATORE 1	**TESTA**	(1 , -1)	(-1 , 1)
	CROCE	(-1 , 1)	(1 , -1)

Situazione Speciale : in questo gioco non abbiamo alcuna situazione speciale.

Le Funzioni di Risposta Ottima

Ci serviamo di tali funzioni per trovare in modo più immediato eventuali equilibri di Nash di giochi di strategia con preferenze ordinali.
La “funzione di risposta ottima” per un generico giocatore i è così definita:

$B_i(a_{-i}) = \{a_{-i}$ Î$\mathcal{A}_{¿}$ | $U_i(a_i, a_{-i})$ ³ $U_i(a'_i, a_{-i})$ " a'_i Î$\mathcal{A}_{¿}$ }

Vale inoltre la seguente:

Prop. Il profilo di azione $a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ è un equilibrio di Nash di un gioco di strategia con preferenze ordinali se, e solo se, per ogni giocatore i l’azione a_i^* è una ri sposta ottima alle mosse degli altri giocatori; cioè se e solo se

a_i^* Î $B_i(a_{-i}^*)$

per ogni giocatore i.

La definizione di equilibrio di Nash in termini di risposta ottima ci suggerisce il seguente **metodo** per determinare tali equilibri:

- trovare la funzione di risposta ottima di ogni giocatore;
- trovare i profili di gioco che soddisfano la proposizione.

Vediamo quindi alcuni esempi di determinazione di eventuali equilibri di Nash attraverso lo studio delle funzioni di risposta ottima:

Esempio

		GIOCATORE 2		
		L	**C**	**R**
GIOCATORE 1	**T**	(1,2*)	(2*,1)	(1*,0)
	M	(2*,1*)	(0,1*)	(0,0)
	B	(0,1)	(0,0)	(1*,2*)

Scriviamo le funzioni di risposta ottima del giocatore 1:

b_1(L) = { M }
b_1(C) = { T }
B_1(R) = { T,B }

Per il giocatore 2 si ha invece:
b_2(T) = { L }
B_2(M) = { L,C }
b_2(B) = { R }
Quindi i profili che corrispondono ad una equilibrio di Nash sono (M,L) e (B,R).

Dilemma del Prigioniero

L' equilibrio di Nash è (spia, spia) infatti :
b_1(silenzio) = { spia }
b_1(spia) = { spia }
b_2(silenzio) = { spia }
b_2(spia) = { spia }.

		PRIGIONIERO 2	
		SILENZIO	SPIA
RIGIONIERO	SILENZIO	(2 , 2)	(0 , 3*)
	SPIA	(3* , 0)	(1* , 1*)

Bach o Stravinsky

Gli equilibri di Nash sono (Bach, Bach) e (Strav. , Strav.) infatti :
b_1(Bach) = { Bach }
b_1(Strav.) = { Strav. }
b_2(Bach) = { Bach }
b_2(Strav.) = { Strav. }.

		GIOCATORE S	
		BACH	STRAVINSKY
GIOCATORE B	BACH	(2* , 1*)	(0 , 0)
	STRAV.	(0 , 0)	(1* , 2*)

Matching Pennies

In questo caso non abbiamo alcun equilibrio di Nash come si verifica dalla tabella.

		GIOCATORE 2	
		TESTA	CROCE
GIOCATORE 1	TESTA	(1* , -1)	(-1 , 1*)
	CROCE	(-1 , 1*)	(1* , -1)

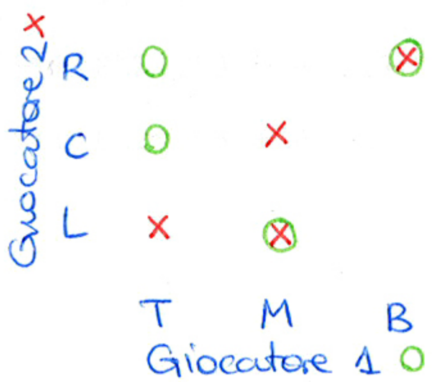
Stag Hunt

Gli equilibri di Nash sono (cervo, cervo) e (lepre, lepre) infatti :
b_1(cervo) = { cervo }
b_1(lepre) = { lepre }
b_2(cervo) = { cervo }
b_2(lepre) = { lepre }.

		CACCIATORE 2	
		CERVO	LEPRE
CACCIATORE 1	CERVO	(2* , 2*)	(0 , 1)
	LEPRE	(1 , 0)	(1* , 1*)

Rappresentazione delle Funzioni di Risposta Ottima

Le funzioni di risposta ottima dei giocatori possono essere rappresentate anche in modo differente. Riprendiamo la tabella del primo esempio e denotiamo le risposte ottime del giocatore 1 con un cerchietto ○ e quelle del giocatore 2 con una crocetta ×. Avremo allora che l'equilibrio di Nash sarà dato dai " punti " denotati con ⊗.

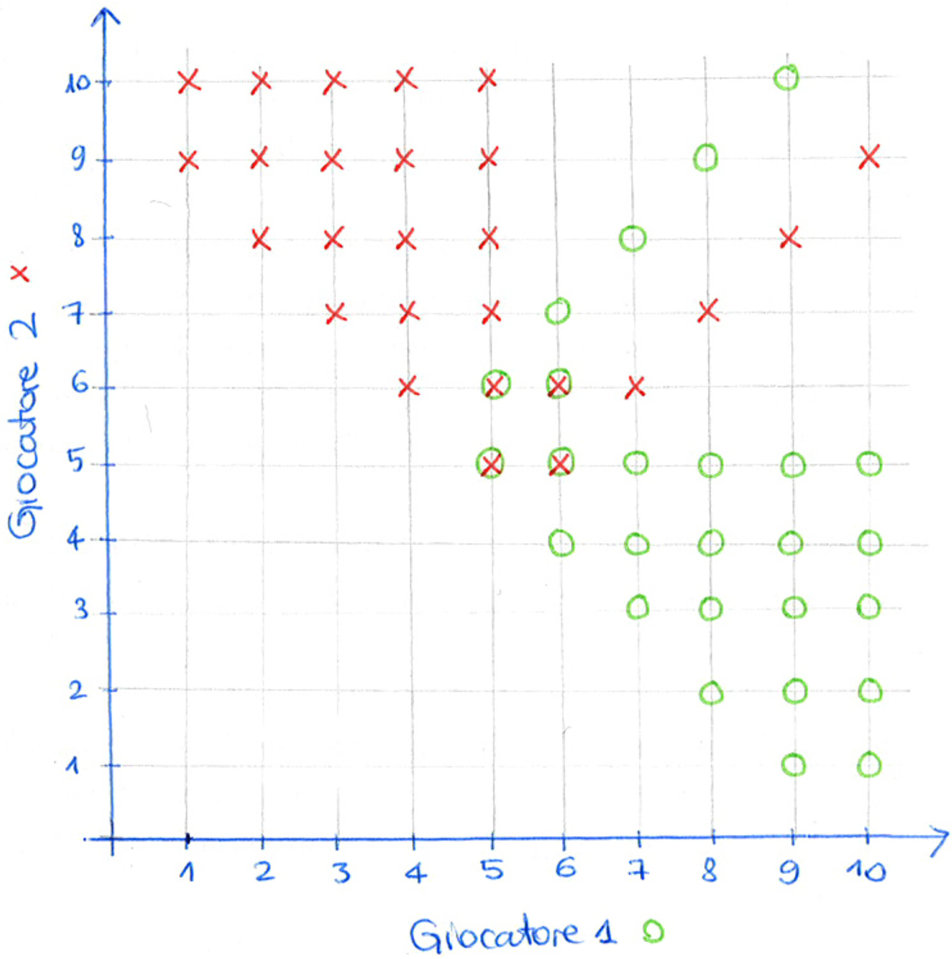


ESEMPIO

Due fratelli hanno 10 euro da dividere, regalo di una nonna. Per divertirsi usano il seguente procedimento: ogni fratello dice un numero (intero non negativo) al più uguale a 10. Se la somma di due numeri dichiarati è al più 10 allora ciascuno riceve l'ammontare di denaro dichiarato (ed un eventuale rimanenza è data in beneficenza). Se la somma dei due numeri dichiarati supera 10 e tali numeri sono diversi tra di loro allora il fratello che ha dichiarato il numero più basso riceve ciò che gli spetta ed il resto va all'altro fratello. Se la somma dei due numeri dichiarati supera 10 e tali numeri sono uguali allora i 10 euro sono divisi equamente tra i due fratelli.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1									1,9*	1,9*
2								2,8*	2,8*	2,8*
3							3,7*	3,7*	3,7*	3,7*
4						4,6*	4,6*	4,6*	4,6*	4,6*
5					5*,5*	5*,5*	5,5*	5,5*	5,5*	5,5*
6				6*,4	5*,5*	5*,5*	6*,4	6,4	6,4	6,4
7			7*,3	6*,4	5*,5	4,6*	5,5	7*,3	7,3	7,3
8		8*,2	7*,3	6*,4	5*,5		3,7*	5,5	8*,2	8,2
9	9*,1	8*,2	7*,3	6*,4	5*,5			2,8*	5,5	9*,1
10	9*,1	8*,2	7*,3	6*,4	5*,5				1,9*	

Quindi gli equilibri di Nash del gioco sono dato da (5,5), (5,6), (6,5), (6,6).
Usando la rappresentazione alternativa si ottiene il seguente grafico:



Duetto Musicale

Un pianista ed un violinista, che formano un duetto musicale, devono preparare un concerto. Maggiore sarà l'impegno che entrambi metteranno nella preparazione e migliore sarà l'esito del concerto.

Per ogni dato contributo a_j del musicista j, la risposta del musicista i (in termini di valori della sua funzione indicatrice U_i) prima aumenta e poi diminuisce all'aumentare del proprio contributo a_i. Per capire questo andamento basta pensare che quando il duetto ritiene di aver trovato la riuscita ottimale per il concerto potrà cominciare a diminuire l'intensità del lavoro onde evitare un inutile affaticamento che potrebbe rovinare l'intesa tra i due musicisti e quindi anche far diminuire la qualità della musica prodotta.

Un livello di contributo è rappresentato da un numero non negativo e le preferenze del musicista i-esimo sono rappresentate dalla funzione indicatrice:

$$U_i(a_i, a_j) = a_i(c + a_j - a_i)$$

dove a_i ed a_j sono rispettivamente i livelli di contributo del musicista i e j, e c è una costante strettamente positiva.

Si può modellizzare questa situazione con il seguente gioco di strategia:

Giocatori i due musicisti;

Mosse per ciascun musicista è l'insieme dei livelli di contributo, cioè un insieme di numeri reali non negativi;

Preferenze quelle dell'i-esimo musicista sono rappresentate dalla funzione indicatrice :

$$U_i(a_i, a_j) = a_i(c + a_j - a_i)$$

Dobbiamo osservare che in questo caso ogni giocatore ha infinite possibilità quindi non possiamo usare la rappresentazione vista negli esempi precedenti. Per trovare gli eventuali equilibri di Nash costruiamo ed analizziamo le funzioni di risposta ottima dei due giocatori.

Consideriamo il generico giocatore i, i=1,2.

Dato a_j la funzione indicatrice del giocatore i è una funzione quadratica di a_i essendo:

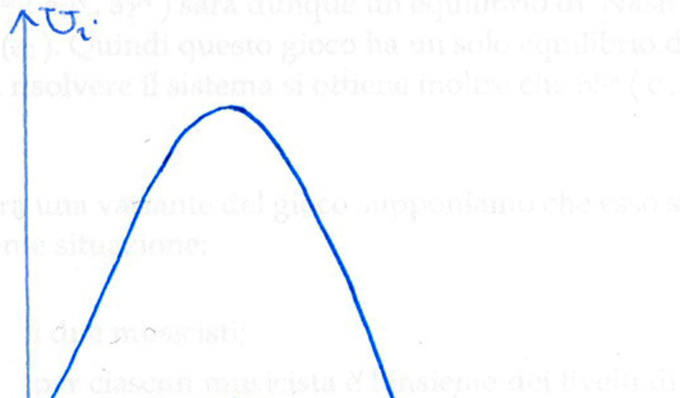
$$U_i (a_i , a_j) = a_i (c + a_i - a_i) = a_i c + a_i a_j - a_i^2$$

Studiamo dunque tale funzione con a_j fissato ed a_i come variabile:

$$U_i (a_i , a_j) = 0 \Leftrightarrow a_i = 0 \text{ e } a_i = c + a_j$$

Tale curva risulta inoltre essere una parabola con la concavità rivolta verso il basso.

Il suo grafico sarà dunque dato da :



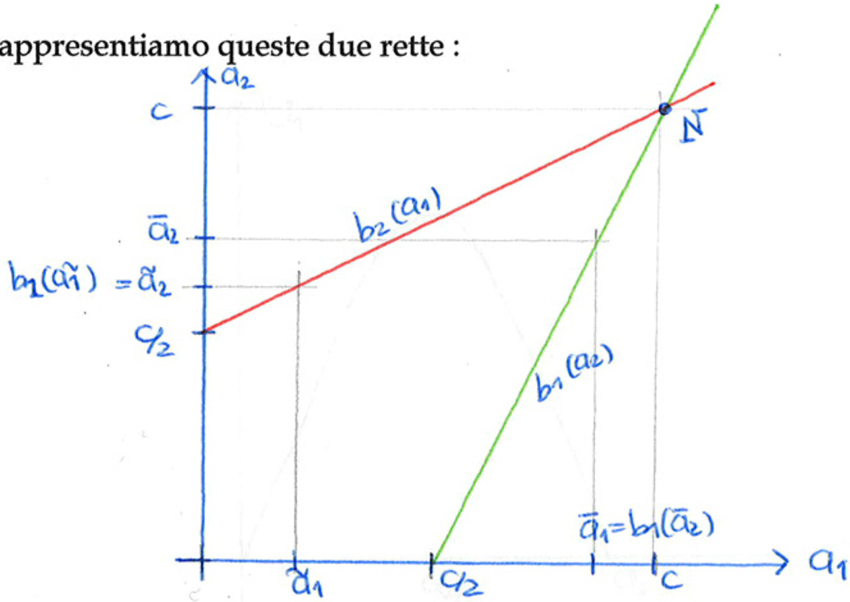
Quindi U_i avrà il suo massimo nel vertice, cioè quando $a_i = ½ (c + a_j)$.
La risposta ottima di ogni musicista i alla mossa a_j è:

$$b_i (a_j) = ½ (c + a_j)$$

Avremo quindi in particolare che :

- $b_1 (a_2) = ½ (c + a_2)$
- $b_2(a_1) = ½ (c + a_1)$

Rappresentiamo queste due rette :



Il punto N= (a_1^N , a_2^N) sarà dunque un equilibrio di Nash in quanto N∈ $b_1(a_2) \cap b_2(a_1)$. Quindi questo gioco ha un solo equilibrio di Nash. Andando a risolvere il sistema si ottiene inoltre che N= (c , c).

Vediamo ora una variante del gioco supponiamo che esso sia descritto dalla seguente situazione:

Giocatori i due musicisti;

Mosse per ciascun musicista è l'insieme dei livelli di contributo, cioè un insieme di numeri reali non negativi;

Preferenze sono rappresentate dalle rispettive funzioni indicatrici :

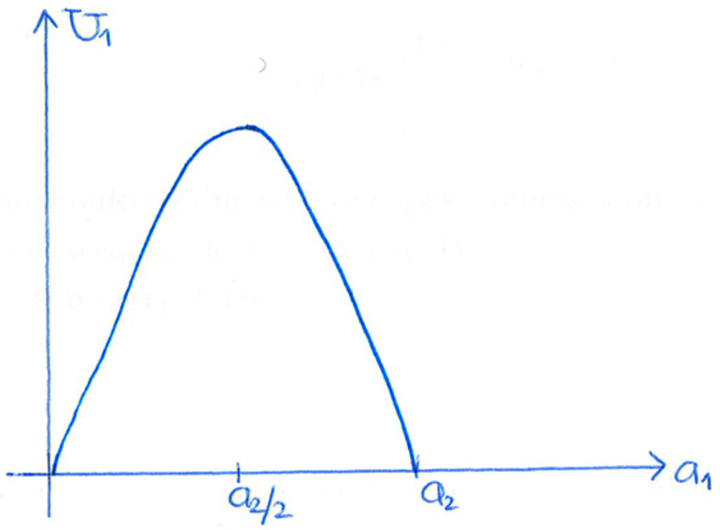
$$U_1(a_1, a_2) = a_1(a_2 - a_1)$$

$$U_2(a_1, a_2) = a_2(1 - a_2 - a_1)$$

Studiamo dapprima $U_1(a_1, a_2)$ come funzione di a_1 considerando fissato a_2 . Anch'essa rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso il basso, e quindi avrà il suo massimo nel vertice; determiniamo quel valore di a_1 a cui corrisponde il vertice della parabola.

$$U_1(a_1, a_2) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ e } a_1 = a_2$$

Quindi:

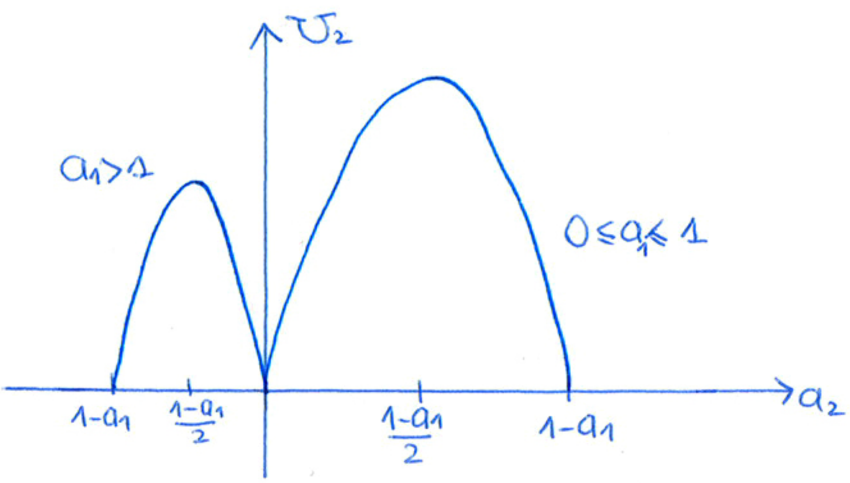


Allora abbiamo che:

$$b_1(a_2) = a_2 / 2$$

Analogamente andiamo a studiare $U_2(a_1, a_2)$ come funzione di a_2 considerando fissato a_1.

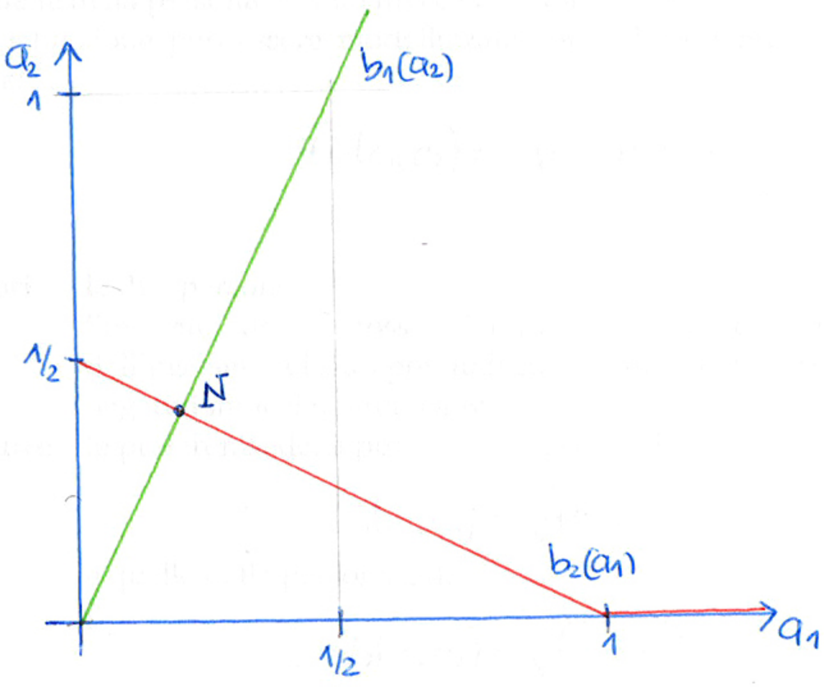
$$U_2(a_1, a_2) = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0 \text{ e } a_2 = 1 - a_1$$



Quindi si ottiene stavolta che:

$$b_2(a_1) = \begin{cases} \dfrac{1-a_1}{2} & 0 \le a_1 \le 1 \\ 0 & a_1 > 1 \end{cases}$$

Riportando su un grafico le due rette di risposta ottima si ottiene anche in questo caso un unico equilibrio di Nash dato da
N= (1/5 , 2/5) $\in b_1(a_2) \cap b_2(a_1)$.



Contribuire al bene pubblico (1°)

Consideriamo la situazione di due persone che devono decidere se contribuire al bene pubblico e in che misura. Denotiamo la ricchezza della persone i-esima con w_i e la somma con la quale contribuisce al bene pubblico con c_i ; spende la ricchezza che le rimane w_i - c_i in beni privati. L'ammontare del bene pubblico è dato dalla somma dei singoli contributi. Ogni persona si preoccupa sia del bene pubblico che del consumo dei beni privati. Infine supponiamo che le preferenze della persona 1 siano rappresentate dalla funzione indicatrice:

$$U_1(c_1, c_2) = \sqrt[4]{(c_1 + c_2)} - c_1$$

e che quelle della persona 2 siano invece date da:
Questa situazione può essere modellizzata come il seguente gioco di strategia:

$$U_2(c_1, c_2) = \sqrt{(c_1 + c_2)} - c_2$$

Giocatori le due persone;

Mosse l'insieme delle mosse dell'i-esimo giocatore è dato dall'insieme dei suoi possibili contributi, numeri reali non negativi minori o uguali a w_i ;

Preferenze le preferenze della persona 1 sono date da:

$$U_1(c_1, c_2) = \sqrt[4]{(c_1 + c_2)} - c_1$$

e quelle della persona 2 da:

$$U_2(c_1, c_2) = \sqrt{(c_1 + c_2)} - c_2$$

Per trovare gli equilibri da Nash andiamo al solito a determinare le funzioni di risposta ottima.

- $b_1(c_2)$

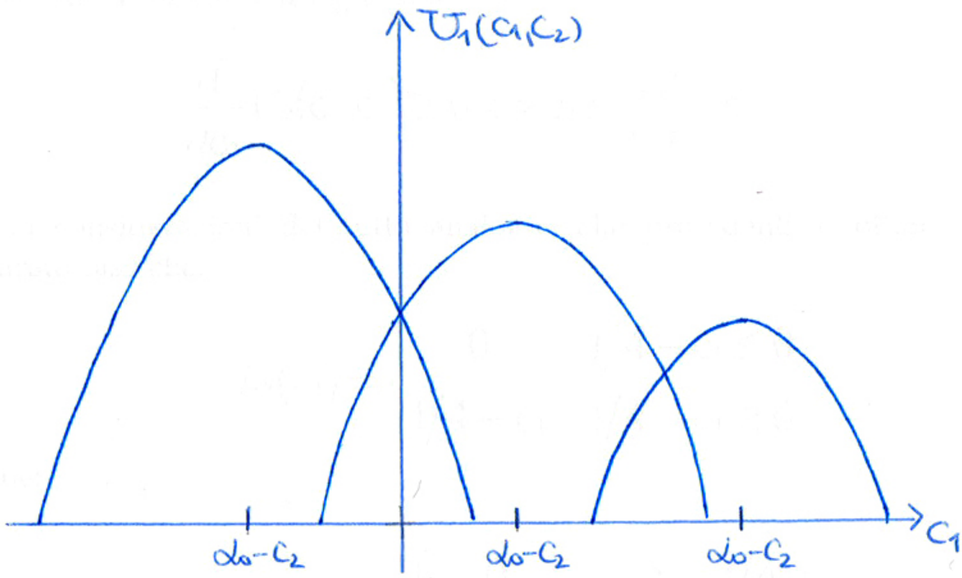
Considerata c_2 fissata andiamo a determinare quel valore di c_1 per cui $U_1(c_1, c_2)$ è massima:

$$\frac{d}{dc_1} U_1(c_1, c_2) = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{4/3}$$

Studiando il segno di tale derivata si ha che :

$$\frac{d}{dc_1} U_1(c_1, c_2) \geq 0 \Leftrightarrow c_1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{4/3} - c_2$$

Se andiamo quindi a rappresentare la famiglia di curve $U_1(c_1, c_2)$ al variare di c_2 avremo il seguente grafico.



Quindi dato il nostro vincolo ad avere $c_1, c_2 \geq 0$ abbiamo che la funzione di risposta ottima della persona 1 è data da:

$$b_1(c_2) = \begin{cases} 0 & \alpha_0 - c_2 \leq 0 \\ \alpha_0 - c_2 & \alpha_0 - c_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_0 = \left(\frac{1}{4}\right)^{4/3} \leq \frac{1}{4}$$

$$b_1(c_2) = \begin{cases} 0 & c_2 \geq \alpha_0 \\ \alpha_0 - c_2 & 0 \leq c_2 \leq \alpha_0 \end{cases}$$

- $b_2(c_1)$

Andiamo a determinarla in modo analogo; fissiamo quindi c_1 e cerchiamo quel valore di c_2 per cui $U_2(c_1, c_2)$ è massima:

$$\frac{d}{dc_2} U_2(c_1, c_2) = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = \frac{1}{4}$$

andando a studiarne il segno si ha che:

$$\frac{d}{dc_2} U_2(c_1, c_2) \geq 0 \Leftrightarrow c_2 \leq \frac{1}{4} - c_1$$

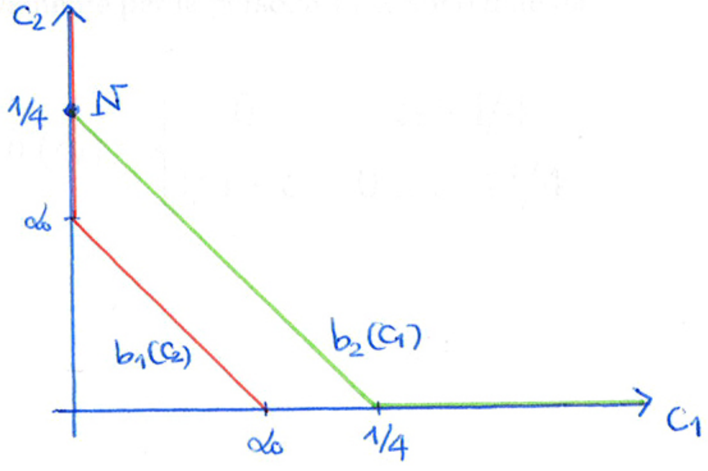
Con considerazioni del tutto analoghe alle precedenti si ottiene in questo caso che:

$$b_2(c_1) = \begin{cases} 0 & 1/4 - c_1 \leq 0 \\ 1/4 - c_1 & 1/4 - c_1 \geq 0 \end{cases}$$

cioè:

$$b_2(c_1) = \begin{cases} 0 & c_1 \geq 1/4 \\ 1/4 - c_1 & 0 \leq c_1 \leq 1/4 \end{cases}$$

Mettiamo $b_1(c_2)$ e $b_2(c_1)$ in un grafici ed andiamo a determinare eventuali equilibri di Nash.



Dal grafico risulta quindi che l'unico equilibrio di Nash è dato dal punto (0, ¼) ; questo perché la persona 1 che è interessata ad un contributo totale più basso (pari ad α_0), non contribuisce, mentre tutto il contributo è dato dalla persona 2, quella interessata ad un livello di contributo pubblico maggiore ($\alpha_0 \leq 1/4$) . In pratica ciò che succede è che contribuisce soltanto quella persona che ha più forte il senso dello stato, mentre l'altra non si preoccupa di contribuire in alcun modo.

Contribuire al bene pubblico (2°)

Giocatori le due persone;

Mosse l'insieme delle mosse dell'i-esimo giocatore è dato dall'insieme dei suoi possibili contributi , numeri reali non negativi minori o uguali a w_i ;

Preferenze le preferenze della persona 1 sono date da:

$$U_1(c_1, c_2) = \sqrt{(c_1 + c_2)} - c_1$$

e quelle della persona 2 da:

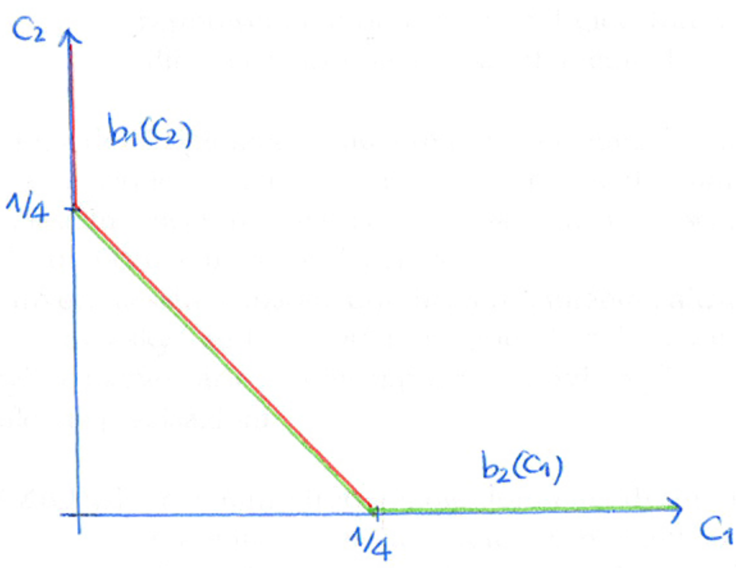
$$U_2(c_1, c_2) = \sqrt{(c_1 + c_2)} - c_2$$

Per quanto visto nel caso 1° avremo che le due funzioni di risposta ottima, rispettivamente per la persona 1 e 2, sono date da:

$$b_1(c_2) = \begin{cases} 0 & c_2 \geq 1/4 \\ 1/4 - c_2 & 0 \leq c_2 \leq 1/4 \end{cases}$$

$$b_2(c_1) = \begin{cases} 0 & c_1 \geq 1/4 \\ 1/4 - c_1 & 0 \leq c_1 \leq 1/4 \end{cases}$$

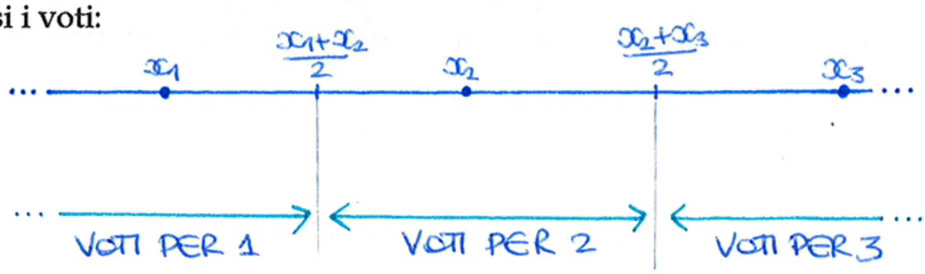
Rappresentandole in un grafico si ottiene che:



In tal caso abbiamo che gli equilibri di Nash sono dati dal segmento di retta $c_1 + c_2 = ¼$; entrambe le persone sono infatti interessate a far sì che l'ammontare totale del bene comune sia proprio ¼ , quindi ciascuna di loro andrà ad integrare il contributo dell'altra fino a che la somma dei contributi arrivi proprio ad ¼.

Competizione elettorale

Studiamo ora un modello che risulta essere alla base di molte teorie su fenomeno politici nel quale ciascun candidato sceglie una politica, ciascun cittadino ha delle preferenze sulle politiche proposte e vota per uno dei candidati. Consideriamo quindi un gioco nel quale i candidati saranno i giocatori e la politica da loro proposta è rappresentata con un numero(inteso come la loro posizione). Per semplificare comprimiamo l'asse destra-sinistra, nel quale solitamente si dividono le posizioni politiche, in un unico asse.
Tra tutte le politiche che potranno presentarsi assume un particolare significato la posizione mediana **m**, quella cioè con la proprietà che esattamente metà delle altre posizioni è al più **m** e l'altra metà è almeno **m**.
Vediamo con un esempio quale è il procedimento con cui vengono divisi i voti:



In tal caso ho tre candidati con posizioni x_1, x_2, x_3; i voti sono suddivisi come in figura con l'ipotesi che i voti dei cittadini la cui posizione preferita coincide con

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{x_3 + x_2}{2}$$

sono divisi esattamente a metà.
Il gioco che si delinea è il seguente:

Giocatori = due candidati;

Mosse = ogni insieme di mosse per ciascun candidato è l'insieme delle possibili posizioni;

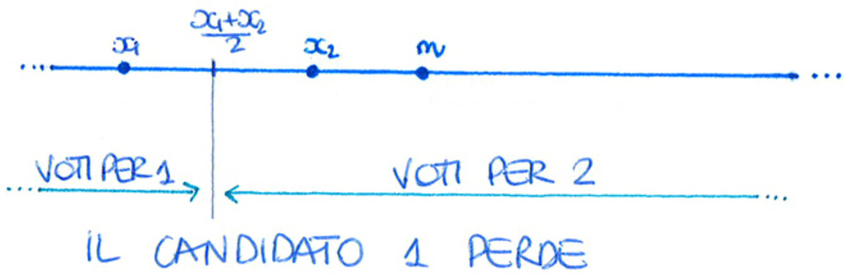
Preferenze = le preferenze di ciascun candidato sono rappresentate da una funzione indicatrice che assegna **n** ad ogni profilo di azione in cui egli vince, **n / 2** ad ogni profilo di azione in cui egli pareggia, **0** ad ogni profilo in cui egli perde.

Studiamo eventuali equilibri di Nash attraverso le funzioni di risposta ottima.

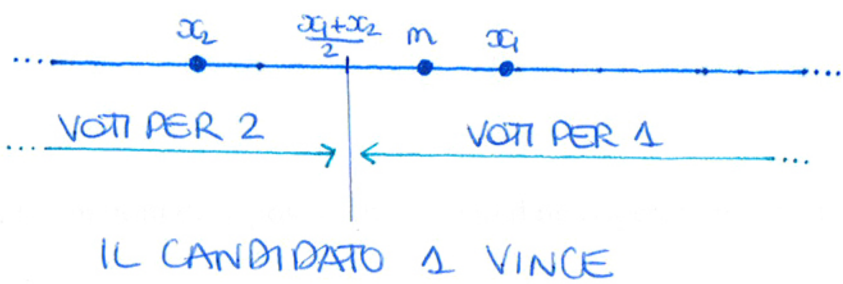
Fissiamo la posizione x_2 del giocatore 2 e consideriamo la posizione ottima del giocatore 1;

supponiamo che $x_2 < m$ si hanno due possibilità:

1.



2.



Quindi la risposta ottima è quel valore di x_1 per cui:

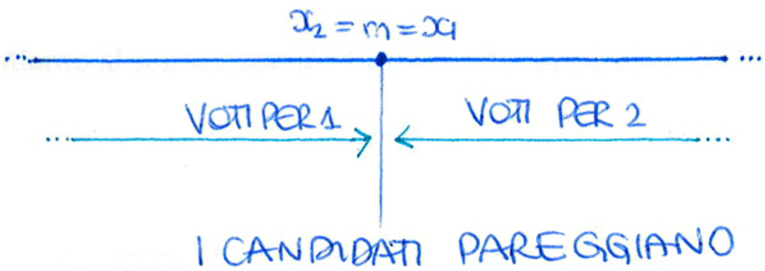
$$\frac{x_1 + x_2}{2} < m \qquad \Rightarrow \qquad x_1 < 2m - x_2$$

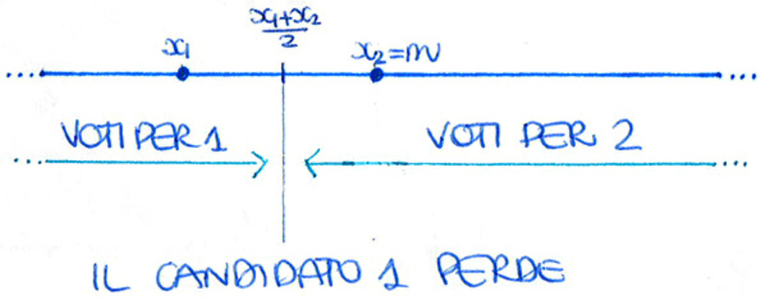
Per cui se $x_2 < m$ la risposta ottima è data da: $x_2 < x_1 < 2m - x_2$

Se invece $x_2 > m$ si ha per simmetria che $2m - x_2 < x_1 < x_2$

Nel caso in cui $x_2 = m$ la risposta ottima del giocatore 1 è proprio $x_1 = m$.

Infatti:



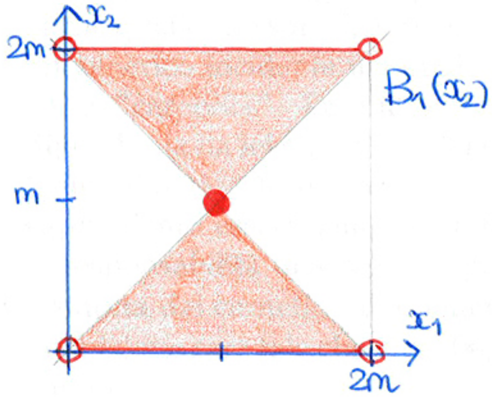


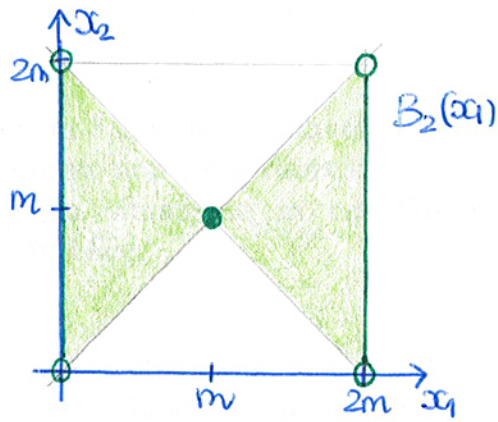
Quindi le funzioni di risposta ottima sono date rispettivamente da:

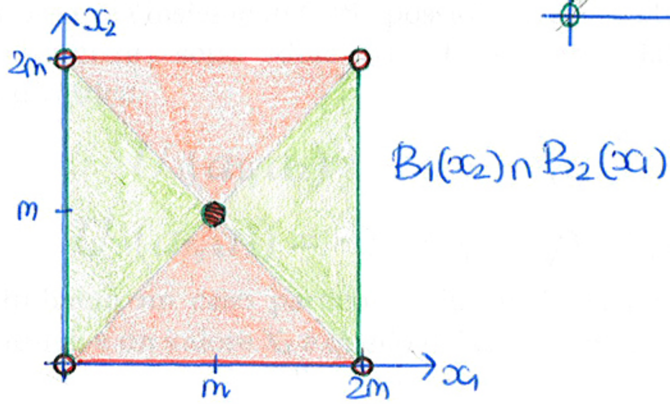
$$B_1(x_2) = \begin{cases} \{x_1 \mid x_2 < x_1 < 2m - x_2\} & x_2 < m \\ m & x_2 = m \\ \{x_1 \mid 2m - x_2 < x_1 < x_2\} & x_2 > m \end{cases}$$

$$B_2(x_1) = \begin{cases} \{x_2 \mid x_1 < x_2 < 2m - x_1\} & x_1 < m \\ m & x_1 = m \\ \{x_2 \mid 2m - x_1 < x_2 < x_1\} & x_1 > m \end{cases}$$

Rappresentiamo al solito ciascuna funzione di risposta ottima in un grafico:







Risulta quindi ha il gioco ammette un solo punto di equilibrio dato da **(m, m)** nel quale i candidati scelgono la posizione mediana e l'esito dell'elezione è un pareggio. Si conclude quindi con questa analisi che la competizione tra i candidati per assicurarsi una maggioranza di voti degli elettori porta a scegliere la stessa posizione per tutti, che coincide con la posizione mediana. Hotelling (1929-54), a cui si deve questo modello, scrisse che le conclusioni trovate erano esemplificate in modo impressionante nel modello politico americano in cui entrambi i partiti, democratico e repubblicano, "si sforzano di rendere il loro programma il più possibile simile a quello degli altri".