Esame di Stato - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica – 22 giugno 2017

Problema 2

Testo del problema

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:

```
comandi per la figura 1
```

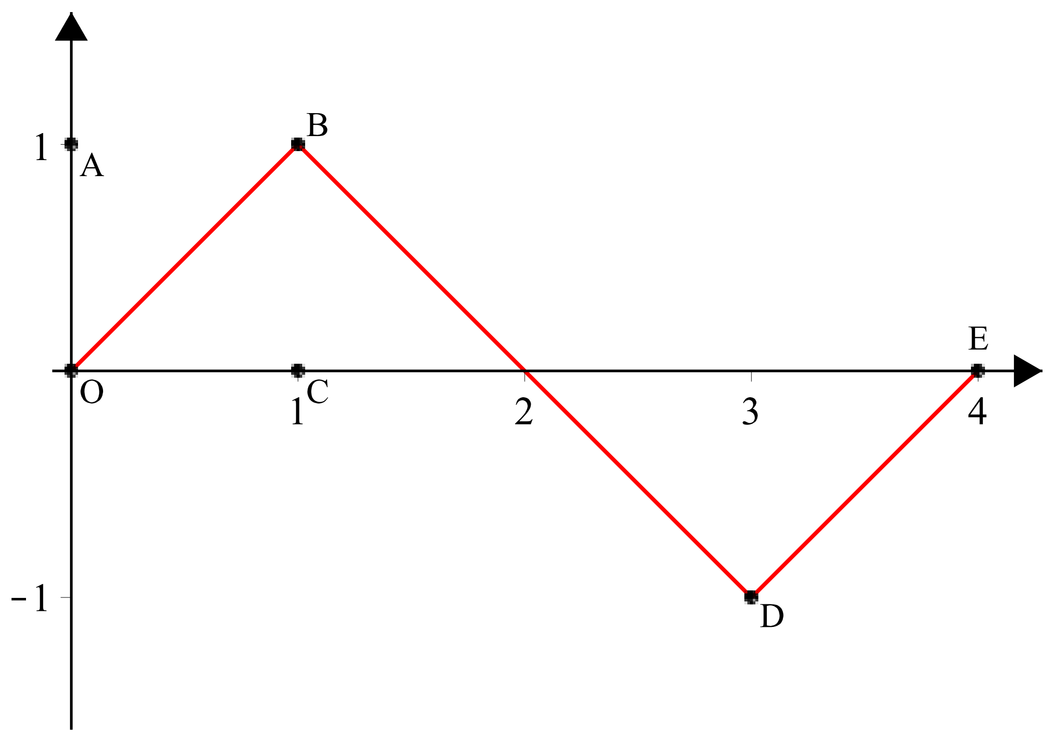


Figura 1

Come si evince dalla *figura 1*, i tratti *OB*, *BD*, *DE* del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0, 0)$, $B(1, 1)$ $D(3, -1)$ $E(4, 0)$.
1) Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti:

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$; qualora esistano, determinane il valore.
Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

2) Considera la funzione:

$$s(x) = \sin(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$.
Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in *figura 1* viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3) Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \text{ e } s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4) Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0; 3]$ e l'asse delle x.

Risoluzione

Punto 1)

La funzione f assegnata è una funzione definita a tratti, oscilla tra -1 e 1, è una funzione dispari e periodica di periodo T=4:

$f(x) := piecewise(0 \leq x \leq 1, x, 1 < x \leq 3, -x+2, 3 < x \leq 4, x-4) :$

$f(x)$

$$\begin{cases} x & 0 \leq x \text{ and } x \leq 1 \\ -x+2 & 1 < x \text{ and } x \leq 3 \\ -4+x & 3 < x \text{ and } x \leq 4 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

E' continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$ perchè unione di funzioni continue.
Calcoliamo la derivata prima.

$fprimo(x) := piecewise(0 \leq x \leq 1, diff(x, x), 1 < x \leq 3, diff(-x+2, x), 3 < x \leq 4, diff(x-4, x)) :$

$fprimo(x)$

$$\begin{cases} 1 & 0 \leq x \text{ and } x \leq 1 \\ -1 & 1 < x \text{ and } x \leq 3 \\ 1 & 3 < x \text{ and } x \leq 4 \end{cases} \tag{2.1.2}$$

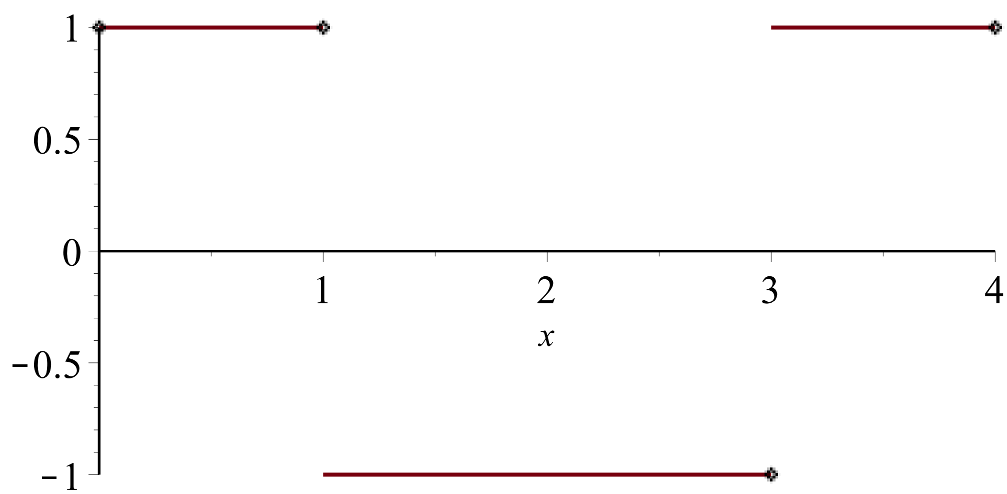
La funzione *fprimo* non è derivabile per $x = 1$ e $x = 3$, i quali sono punti angolosi, mentre in $x = 4$ risulta derivabile, dovendosi connettere per periodicità. Essendo periodica, non è derivabile $\forall\ x = 1 + 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Il primo limite non esiste perché non vale la definizione di limite finito a più infinito. Non è vero che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $M > 0$, tale che per ogni $x > M$ si abbia $|f(x) - l| < \varepsilon$. Per falsificare questa definizione basta prendere in $0 < \varepsilon \le 1$.

Il secondo limite invece esiste. Lo si dimostra con il Teorema del confronto utilizzando questa disuguaglianza che vale per $x > 0$:
$$-\frac{1}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{1}{x} :$$
e passando al limite per x che tende a $+\infty$.
Il valore del secondo limite è quindi 0:
$$limit\left(\frac{f(x)}{x}, x=+\infty\right)$$

$$0 \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

Il grafico della funzione $g(x) = f'(x)$ nell'intervallo $[0, 4]$ è una funzione a scalini e non esiste in $x = 1$ e $x = 3$ perchè sono punti angolosi per la funzione $f(x)$:
$plot(fprimo(x), x = 0 ..4, discont = true, scaling = constrained)$



Il grafico della funzione $h(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ è una funzione rappresentata dal seguente grafico:

$H(x) := piecewise\big(0 \le x \le 1, int(t, t = 0 ..x) + c_1, 1 < x \le 3, int(-t + 2, t = 0 ..x) + c_2, 3 < x$

$\leq 4, int(t-4, t=0..x) + c_3)$:

$H(x)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + c_1 & 0 \leq x \text{ and } x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x + c_2 & 1 < x \text{ and } x \leq 3 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + c_3 & 3 < x \text{ and } x \leq 4 \end{cases} \tag{2.1.4}$$

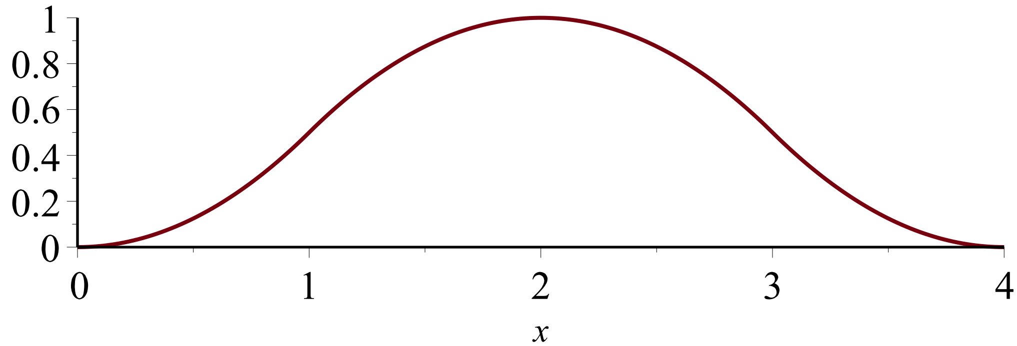
Avendo come estremo inferiore dell'integrale 0, si ha immediatamente che $c_1 = 0$ e trovo c_2 e c_3 in modo da soddisfare la continuità della funzione. Di conseguenza:

$h(x) := eval(H(x), [c_1 = 0, c_2 = -1, c_3 = 8])$:

$h(x)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x \text{ and } x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & 1 < x \text{ and } x \leq 3 \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 & 3 < x \text{ and } x \leq 4 \end{cases} \tag{2.1.5}$$

$plot(h(x), x = 0..4, discont = true, scaling = constrained)$



Ha un massimo per $x = 2$ e tale massimo vale 1; si annulla ovviamente per $x = 0$ e per $x = 4$. E' simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = 2$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale è derivabile nel suo dominio.

Punto 2)

Consideriamo la funzione $s(x) = \sin(b \cdot x)$

$$s(x) = \sin(b\,x) \tag{2.2.1}$$

avente periodo $T = \frac{2\,\pi}{b}$

$$T = \frac{2\,\pi}{b} \tag{2.2.2}$$

con $b \neq 0$. Ponendolo uguale a 4, periodo della funzione f, avremo:

$b = solve\left(eval\left(T = \frac{2\,\pi}{b}, T = 4\right), b\right)$

$$b = \frac{1}{2}\,\pi \tag{2.2.3}$$

La funzione è pertanto:

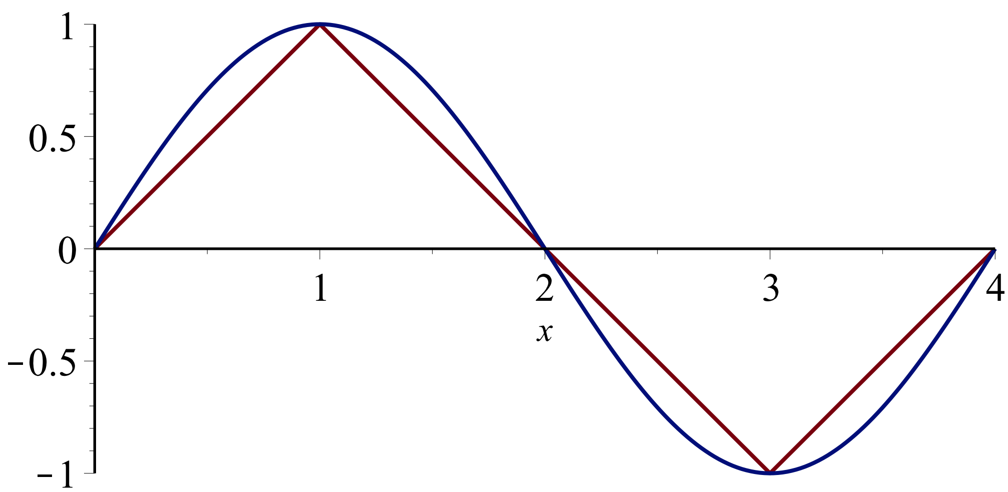
$$s(x) := eval\left(\sin(b\cdot x),\, b = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x \rightarrow \sin(b\,x)\Big|_{b = \frac{1}{2}\pi} \qquad \textbf{(2.2.4)}$$

$s(x)$

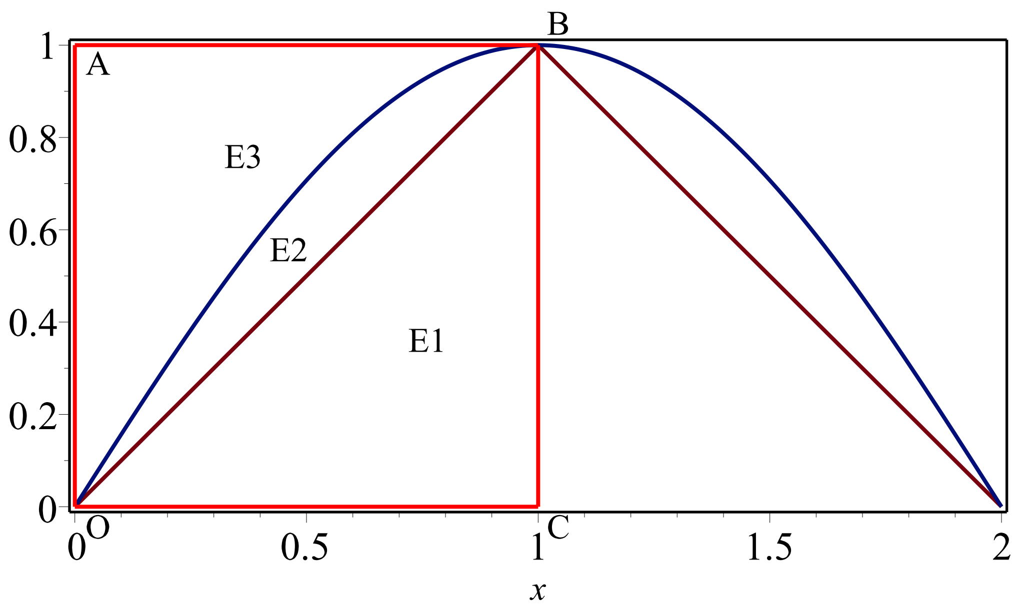
$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \qquad \textbf{(2.2.5)}$$

$plot([f(x), s(x)], x = 0..4, scaling = constrained)$



Disegniamo i grafici delle funzioni $f(x)$ ed $s(x)$ nello stesso sistema di assi cartesiani e focalizziamoci sulla porzione quadrata di piano OABC:

comandi per il grafico sottostante



L'area di ciascuna regione rappresenta già la probabilità perché si deve fare il rapporto con l'area del quadrato di lato 1. Si ottengono i seguenti valori in percentuale:

$p(E1) = \left(evalf_3(int(f(x), x = 0..1))\right) \cdot 100\ per\ cento$

$$p(E1) = 50.000\ per\ cento \tag{2.2.6}$$

$p(E2) = \left(evalf_3(int(s(x), x = 0..1) - int(f(x), x = 0..1))\right) \cdot 100\ per\ cento$

$$p(E2) = 13.600\ per\ cento \tag{2.2.7}$$

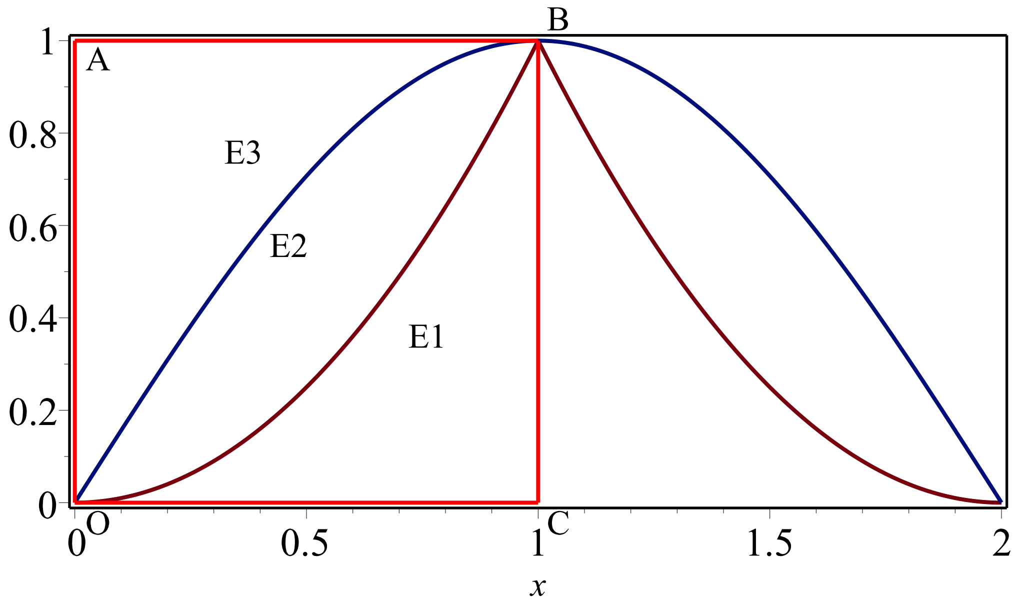
$p(E3) = \left(evalf_3(1 - int(s(x), x = 0..1))\right) \cdot 100\ per\ cento$

$$p(E3) = 36.400\ per\ cento \tag{2.2.8}$$

Punto 3)

Consideriamo la funzione $f(x)^2 = x^2$ nell'intervallo $[0, 1]$.

comandi per il grafico sottostante



Quindi $p(E1)$ diminuisce perché diventa $\frac{1}{3}$ (il quadrato di un numero compreso tra 0 e 1 è minore del
numero:$0 \le x^2 \le x \le 1$).

Si ha che $p(E3)$ aumenta, per lo stesso ragionamento precedente, perché nell'intervallo $[0, 1]$ si ha $0 \le \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \le \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \le 1$.
Esattamente si hanno i seguenti valori in percentuale:

$p(E1) = \left(evalf_3\left(int\left(\left(f(x)^2\right), x = 0..1\right)\right)\right) \cdot 100\ per\ cento$

$$p(E1) = 33.300\ per\ cento \tag{2.3.1}$$

$p(E2) = evalf_3\left(int\left(\left(s(x)^2\right), x = 0..1\right) - int\left(\left(f(x)^2\right), x = 0..1\right)\right) \cdot 100\ per\ cento$

$$p(E2) = 16.700\ per\ cento \tag{2.3.2}$$

$p(E3) = evalf_3\left(1 - int\left(\left(s(x)^2\right), x = 0..1\right)\right) \cdot 100\ per\ cento$

$$p(E3) = 50.000\ per\ cento \tag{2.3.3}$$

Punto 4)

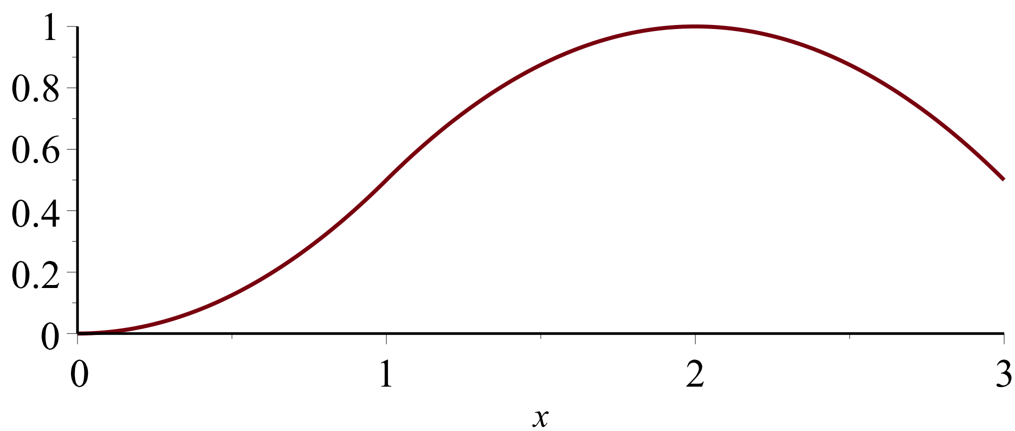
Riconsideriamo la funzione $h(x)$ nell'intervallo $[0..3]$.

$h2(x) := piecewise(0 \le x \le 1, int(t, t=0..x), 1 < x \le 3, int(-t+2, t=0..x) - 1):$

$h2(x)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & 0 \le x \text{ and } x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & 1 < x \text{ and } x \le 3 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

$plot(h2(x), x=0..3, scaling=constrained)$



Con il metodo "dei gusci cilindrici", il volume del solido di rotazione si ottiene nel seguente modo:

$V = 2\pi \cdot int(x \cdot h(x), x=0..3)$

$$V = \frac{83}{12}\pi \tag{2.4.2}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO
ALMA UNIVERSITAS TAURINENSIS

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO