Esame di Stato - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica – 22 giugno 2017

Problema 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al Mo-Math Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico (*figura 1*). È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti. In *figura 2* è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano Oxy: il quadrato di lato $DE = 2$ (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta il profilo della pedana.

figura2

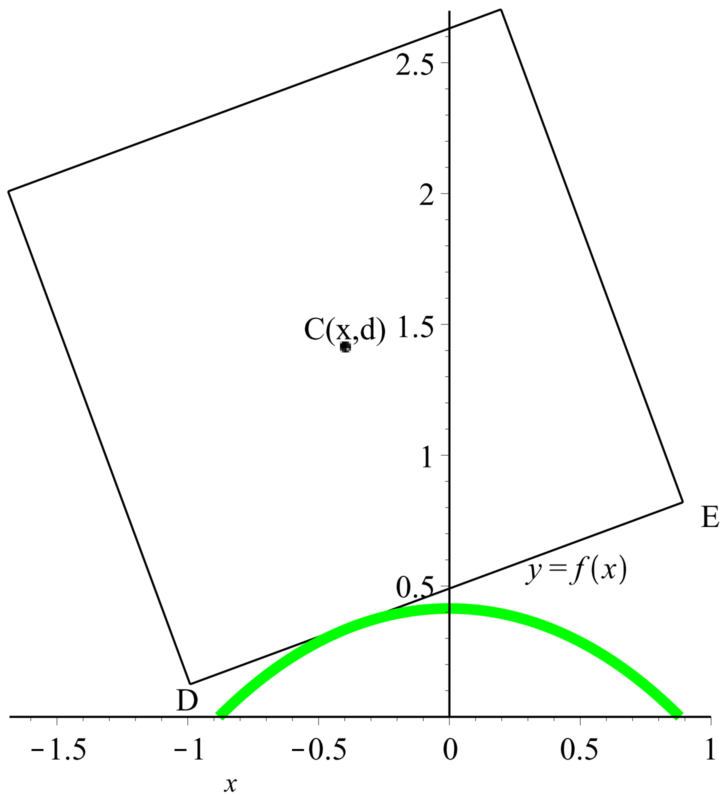


figura2

1) Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in *figura 2*, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per $x \in [-a; a]$; determina inoltre il valore degli estremi a e $-a$ dell'intervallo.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione $f(x)$ relativo all'intervallo $[-a; a]$, come mostrato in *figura 3*.

figura3

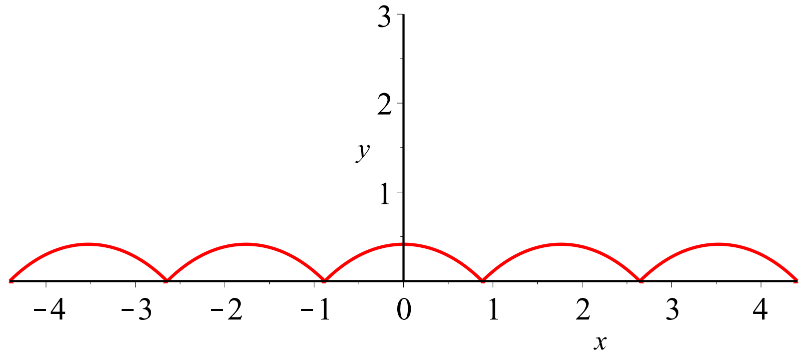


figura3

2) Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:

- a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
- la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una "gobba", cioè dell'arco di curva di equazione $y = f(x)$ per $x \in [-a; a]$.

Stabilisci se tali condizioni sono verificate

NOTA: In generale, la lunghezza dell'arco di curva avente equazione $y = \phi(x)$ compreso tra le ascisse e x_1 e x_2 è data da: $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\phi'(x))^2}\, dx$

Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli ACL e AML in *figura 4*, e ricordando il significato geometrico della derivata, verifica che il valore dell'ordinata *d* del centro della ruota si mantiene costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

figura4

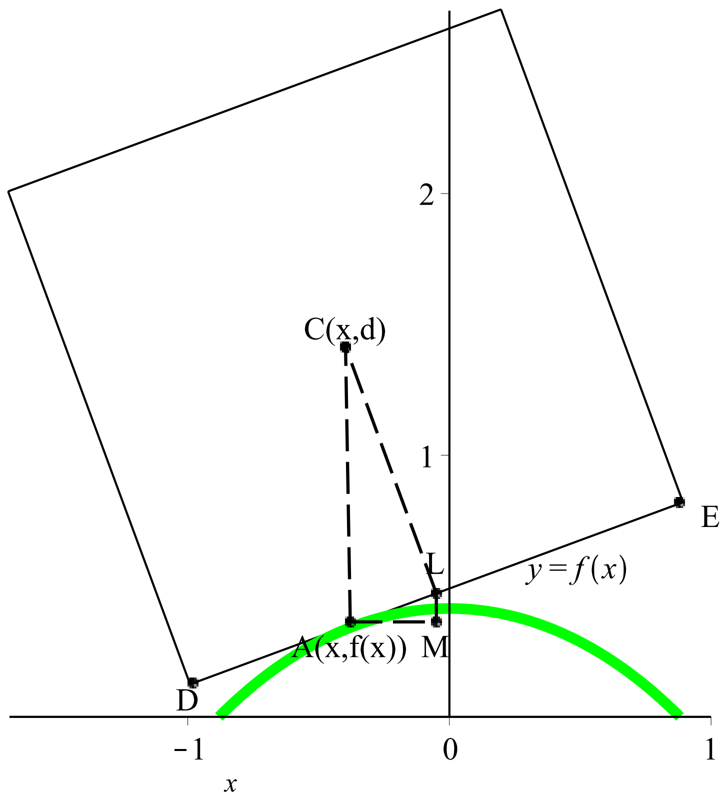


figura4

Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \qquad \text{per } x \in \left[-\frac{\ln(3)}{2}; \frac{\ln(3)}{2} \right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4) Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

Soluzione

Punto 1

Bisogna verificare che la funzione

$$f(x) := \operatorname{sqrt}(2) - \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

$$x \to \sqrt{2} - \frac{1}{2}\,e^{x} - \frac{1}{2}\,e^{-x} \tag{1.1}$$

rappresenti adeguatamente il profilo della pedana.
Deve avere le seguenti proprietà: essere positiva in $[-a, a]$, avere un punto di massimo in 0 ed essere crescente in $(-a, 0)$ e decrescente in $(0, a)$.
La funzione è positiva per
$solve(f(x) \geq 0)$

$$RealRange\left(\ln\left(\sqrt{2} - 1\right), \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right) \tag{1.2}$$

che è dunque vero in un intervallo simmetrico ($\sqrt{2} - 1$ è l'opposto di $\sqrt{2} + 1$). In questo modo abbiamo trovato l'eventuale parametro a.
Calcoliamo
$fprimo(x) := diff(f(x), x)$

$$x \to \frac{d}{dx} f(x) \tag{1.3}$$

$fprimo(x)$

$$-\frac{1}{2}\,e^{x} + \frac{1}{2}\,e^{-x} \tag{1.4}$$

e ne valutiamo crescenza e decrescenza
$solve(fprimo(x) \geq 0)$

$$RealRange(-\infty, 0) \tag{1.5}$$

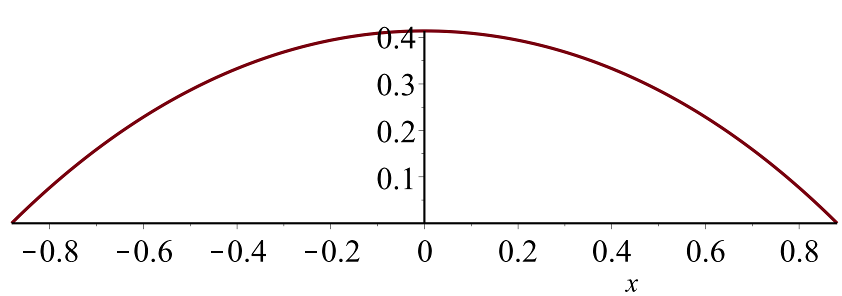
Che ci conferma che 0 è un punto di massimo, la funzione cresce in $\left(-\ln\left(1 + \sqrt{2}\right), 0\right)$ e decresce in $\left(0, \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$.
Per la concavità calcoliamo
$fsecondo(x) := diff(f(x), x\$2)$

$$x \to \frac{d^2}{dx^2} f(x) \tag{1.6}$$

e
$solve(fsecondo(x) \geq 0)$
Non fornisce soluzioni, dunque la concavità è sempre verso il basso.
Abbiamo già trovato gli estremi $-a$ e a svolgendo i conti in precedenza:
$a := \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

$$\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) \tag{1.7}$$

Graficamente, si vede molto bene che la funzione data ha le caratteristiche richieste:
$plot(f(x), x = -a..a, scaling = constrained)$



Punto 2

Dobbiamo verificare le due condizioni nel testo del problema.
Per prima cosa valutiamo
$dersinistra := eval(fprimo(x), x=-a)$

$$-\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}+\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2} \quad \textbf{(2.1)}$$

$derdestra := eval(fprimo(x), x=a)$

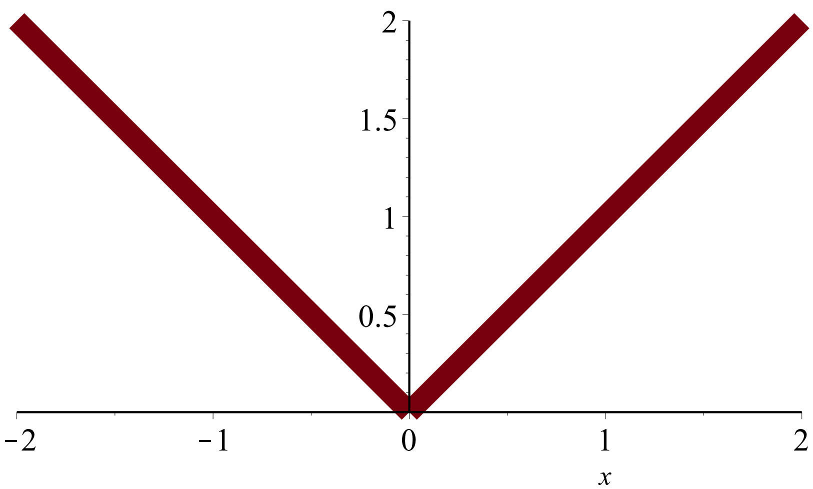
$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(\sqrt{2}+1)} \quad \textbf{(2.2)}$$

che rappresentano la pendenza a sinistra e destra dei punti di non derivabilità. Devono essere ortogonali, dunque i due valori devono essere uno l'antireciproco dell'altro:
$is\left(dersinistra=-\frac{1}{derdestra}\right)$

$$true \quad \textbf{(2.3)}$$

L'angolo che viene a formarsi nei punti di non derivabilità della pedana è il seguente

$plots[display](plot(derdestra\cdot x, x=-2..0), plot(dersinistra\cdot x, x=0..2), thickness=10, scaling=constrained)$



La seconda condizione mi chiede che l'arco di curva uguagli il lato del quadrato, cioè 2.
Bisogna calcolare un integrale curvilineo, in formula
$Int(\mathrm{sqrt}(1+fprimo(x)^2), x=-a..a)$

$$\int_{-\ln(\sqrt{2}+1)}^{\ln(\sqrt{2}+1)}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}\right)^2}\,dx \quad \textbf{(2.4)}$$

che fornisce come risultato
$int(\mathrm{sqrt}(1+fprimo(x)^2), x=-a..a)$

$$2 \quad \textbf{(2.5)}$$

Dunque anche la seconda condizione è verificata.

Punto 3

Per trovare la distanza del centro dall'asse x, mi basta trovare l'ordinata del centro $y[C]$.
Questo valore è dato da $f(x)$ cui va aggiunta la lunghezza del segmento AC. Per trovare la lunghezza di AC sfruttiamo il punto L, punto medio del segmento DE. Dunque CL misura 1 (metà del lato) e AC, per trigonometria, misura Cl diviso il coseno dell'angolo ACL, che chiameremo α.
Dunque

$$y[C]=f(x)+\frac{1}{\cos(\mathrm{alpha})}$$

$$y_C=\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,e^{x}-\frac{1}{2}\,e^{-x}+\frac{1}{\cos(\alpha)} \tag{3.1}$$

Tale angolo corrisponde esattamente all'angolo LAM di cui ne conosciamo la tangente, essendo nient'altro che il valore della derivata prima in quel punto. La relazione che lega coseno e tangente è la seguente:

$$\cos(\mathrm{alpha})=\frac{1}{\mathrm{sqrt}\left(\tan(\mathrm{alpha})^2+1\right)}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\tan(\alpha)^2+1}}$$

Sostituendo al posto di $\tan(\alpha)$ il valore della derivata prima nel generico punto x si ha

$$y[C]:=f(x)+\mathrm{sqrt}\left(1+\mathit{fprimo}(x)^2\right)$$

$$\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,e^{x}-\frac{1}{2}\,e^{-x}+\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\,e^{x}+\frac{1}{2}\,e^{-x}\right)^2} \tag{3.3}$$

Notiamo che il termine sotto radice equivale a

$$\mathit{factor}\left(\mathit{expand}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\,e^{x}+\frac{1}{2}\,e^{-x}\right)^2\right)\right)$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{\left(\left(e^{x}\right)^2+1\right)^2}{\left(e^{x}\right)^2} \tag{3.4}$$

che è un quadrato da portare fuori dalla radice, ottenendo

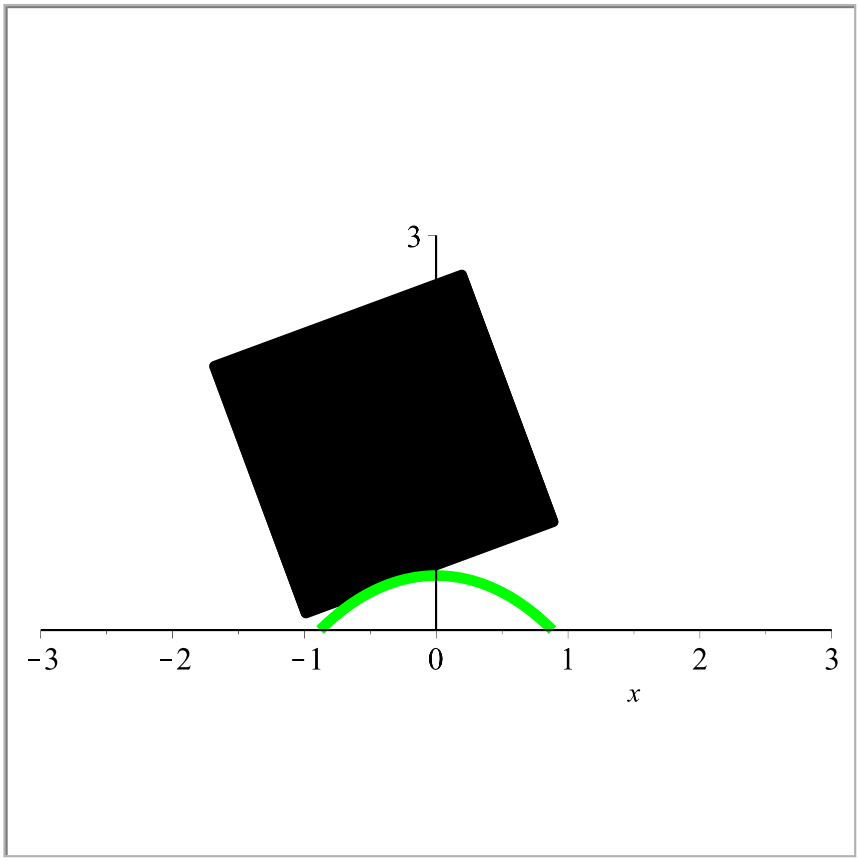
$$\mathit{simplify}\left(f(x)+\frac{1}{2}\,\frac{\left(\left(e^{x}\right)\right)^2+1}{e^{x}}\right)$$

$$\sqrt{2} \tag{3.5}$$

che è l'altezza costante del centro del quadrato.

La ruota quadrata

Inizializza



Punto 4

Per capire quale figura ha

$g(x) := \dfrac{2}{\mathrm{sqrt}(3)} - \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$

$$x \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} e^{x} - \frac{1}{2} e^{-x} \tag{5.1}$$

bisogna capire qual è l'angolo che viene a formarsi nei punti di non derivabilità dove la funzione si annulla.

Prima di tutto tali punti hanno ascisse

$solve(g(x) = 0)$

$$-\frac{1}{2} \ln(3), \frac{1}{2} \ln(3) \tag{5.2}$$

e se calcolo la derivata

$gprimo(x) := diff(g(x), x)$

$$x \rightarrow \frac{d}{dx} g(x) \tag{5.3}$$

$gprimo(x)$

$$-\frac{1}{2} e^{x} + \frac{1}{2} e^{-x} \tag{5.4}$$

e la valuto nei punti estremi

$eval\left(gprimo(x), x = -\frac{\ln(3)}{2}\right)$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} \tag{5.5}$$

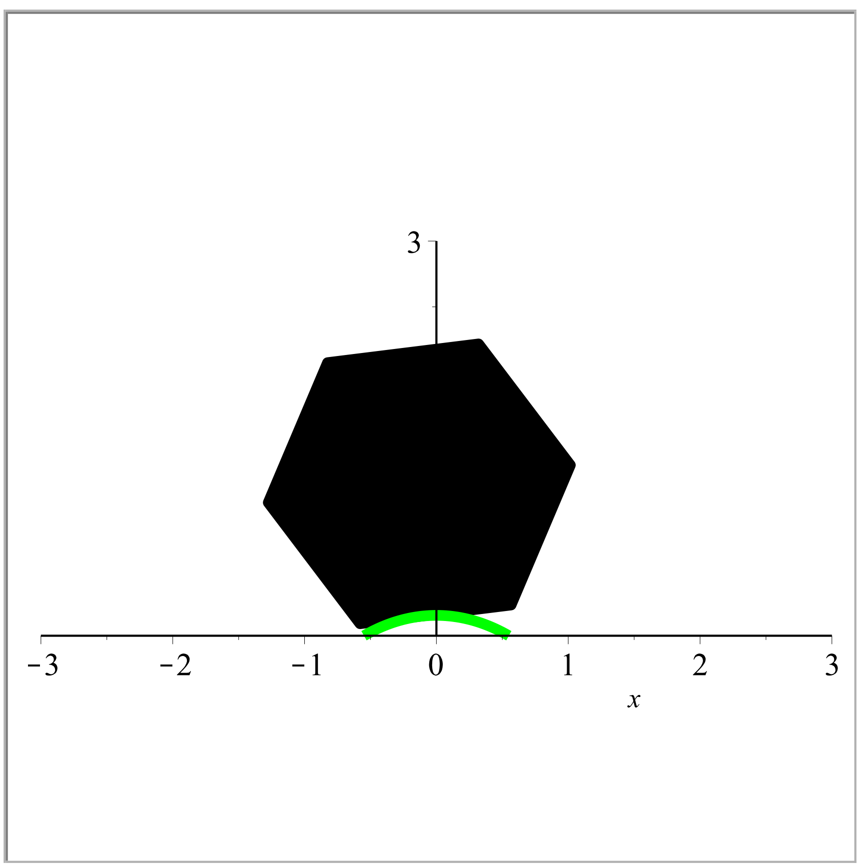
$eval\left(gprimo(x), x = +\frac{\ln(3)}{2}\right)$

$$-\frac{1}{3}\sqrt{3} \tag{5.6}$$

all'estremo sinistro abbiamo un angolo di $\frac{\pi}{6}$, ovvero 30°, all'estremo destro un angolo di $\frac{5}{6}\pi$, ovvero 150°. Dunque l'angolo interno al poligono regolare avrà un'ampiezza di 150° - 30° = 120°.
Il poligono regolare corrispondente è dunque un esagno regolare.

La ruota esagonale

Inizializza



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO
ALMA UNIVERSITAS TAURINENSIS

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO