Esame di Stato - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica – 22 giugno 2017

Questionario

Quesito 1

restart :
Definito il numero E come:

$$E = \int_0^1 xe^x \, dx$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = e - 2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3 e^x \, dx$$

in termini di e ed E.

Soluzione

$Student[Calculus1][IntTutor](x \cdot \exp(x), x = 0..1)$

$$\int_0^1 x\, e^x \, dx$$

$$= e - \int_0^1 e^x \, dx \qquad [parts, x, e^x]$$

$$= 1 \qquad [\exp]$$

$$\int_0^1 x\, e^x \, dx = 1 \tag{1.1.1}$$

Chiamiamo
$E := Int(x \cdot \exp(x), x = 0..1)$

$$\int_0^1 x\, e^x \, dx \tag{1.1.2}$$

$Student[Calculus1][IntTutor](x^2 \cdot \exp(x), x = 0..1)$

$$\int_0^1 x^2\,e^x\,dx$$

$$= \; e - \int_0^1 2\,x\,e^x\,dx \qquad [parts, x^2, e^x]$$

$$= \; e - 2\int_0^1 x\,e^x\,dx \qquad [constantmultiple]$$

$$\int_0^1 x^2\,e^x\,dx = e - 2\left(\int_0^1 x\,e^x\,dx\right) \tag{1.1.3}$$

ovvero $\int_0^1 x^2 e^x\,dx = e - 2E.$

$Student[Calculus1][IntTutor](x^3 \cdot \exp(x), x = 0..1)$

$$\int_0^1 x^3\,e^x\,dx$$

$$= \; e - \int_0^1 3\,x^2\,e^x\,dx \qquad [parts, x^3, e^x]$$

$$= \; e - 3\int_0^1 x^2\,e^x\,dx \qquad [constantmultiple]$$

$$\int_0^1 x^3\,e^x\,dx = e - 3\left(\int_0^1 x^2\,e^x\,dx\right) \tag{1.1.4}$$

Dunque $\int_0^1 x^3 e^x\,dx = e - 3(e - 2E) = 6\mathrm{E} - 2e$

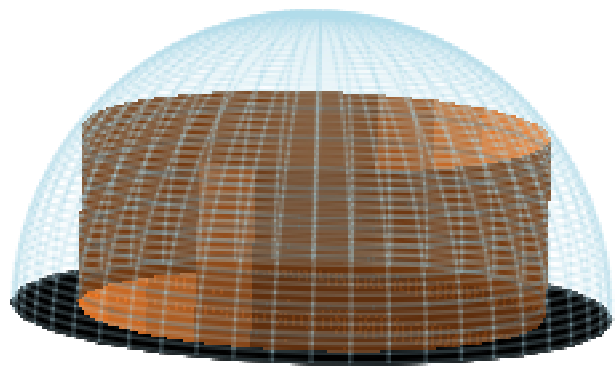
Quesito 2

restart :
Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei 3/5 del volume della semisfera.

Soluzione

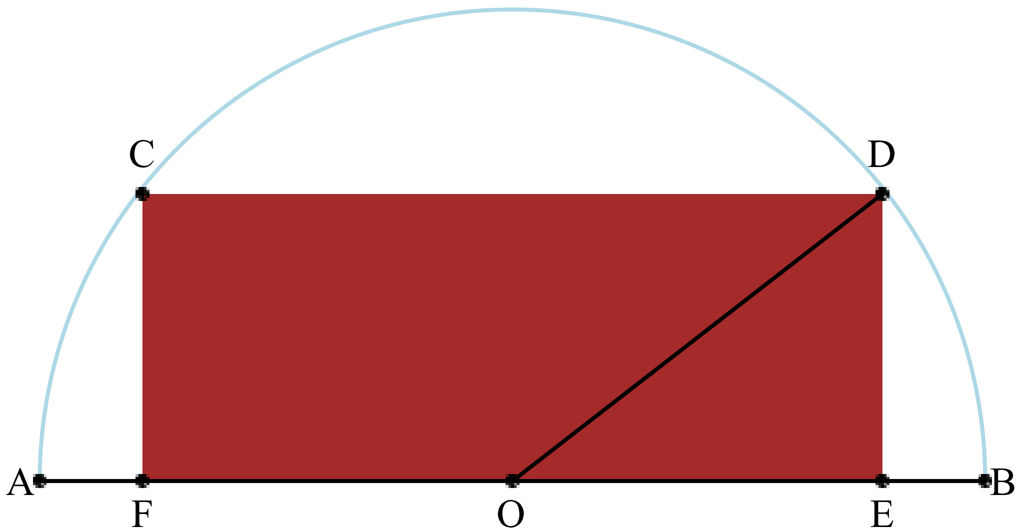
Il problema chiede di verificare che una torta cilindrica collocata sotto la cupola di forma semisferica abbia volume minore dei $\frac{3}{5}$ del volume della semisfera.
Possiamo modellizzare il problema con il seguente grafico interattivo tridimensionale:

comandi grafico3d



Per la risoluzione del problema, consideriamo la sezione dei solidi con un piano passante per il centro della semisfera di raggio *r* e perpendicolare alla base della semisfera e del cilindro:

comandi grafico2d



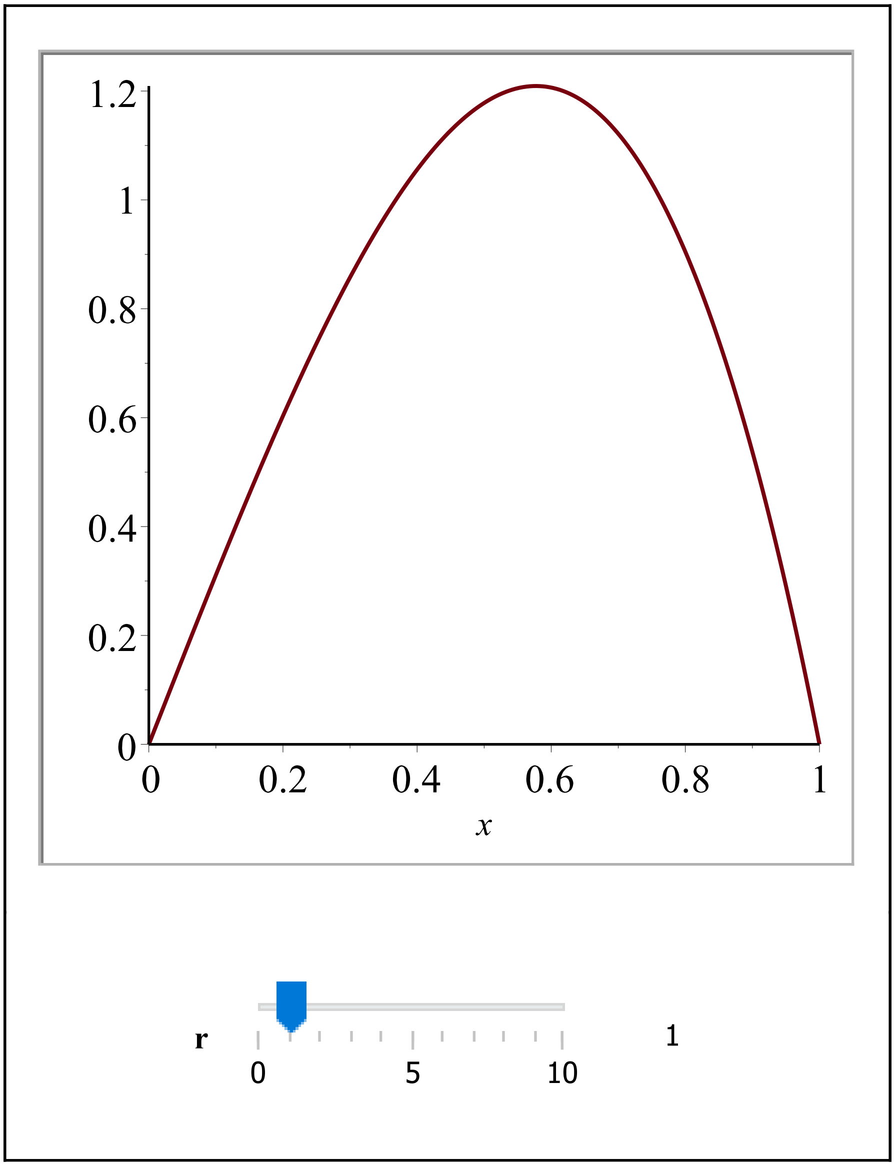
Indichiamo con x l'altezza del cilindro ($DE = x$) con le limitazioni $0 < x < r$ (i casi limite restituirebbero una torta di volume nullo).
Applicando il teorema di Pitagora ricaviamo il raggio di base del cilindro:

$$OE = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Sapendo che la formula per calcolare il volume del cilindro è
$V_{cilindro} = Area_{base} \cdot altezza = \pi \cdot {r_{base}}^2 \cdot h$
esprimiamo il volume della torta in funzione della variabile x:
$V := \pi \cdot x \cdot (r^2 - x^2)$

$$\pi x \left(r^2 - x^2\right) \tag{2.1.1}$$

con $0 < x < r$
$Explore(plot(\mathbf{(2.1.1)}, x = 0 ..r), parameters = [r = 0 ..10])$



Esplorando la funzione notiamo che ha un massimo, per cercarne il valore studiamo quando si annulla la derivata di V:

$dV := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} V$

$$\pi\left(r^2 - x^2\right) - 2\pi x^2 \tag{2.1.2}$$

$solve(\textbf{(2.1.2)} = 0, \{x\})$

$$\left\{x = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,r\right\}, \left\{x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\,r\right\} \tag{2.1.3}$$

Dunque il volume del cilindro è massimo per $x = \frac{\sqrt{3}}{3} r$, e in questo valore il volume è uguale a:

$eval\left(V, x = \frac{\sqrt{3}}{3} r\right)$

$$\frac{2}{9}\pi\sqrt{3}\,r^3 \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

Controlliamo ora se questo volume risulta minore dei $\frac{3}{5}$ del volume della semisfera, pari a $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot r^3$, ovvero se:

$$\frac{2}{9}\cdot\pi\cdot\sqrt{3}\cdot r^3 < \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3$$

$$is\left(\frac{2}{9}\cdot\pi\cdot\sqrt{3} < \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\pi\right)$$

$$\mathit{true} \qquad \textbf{(2.1.5)}$$

Poichè l'espressione è vera il quesito è dimostrato.

Quesito 3

restart :

Sapendo che:

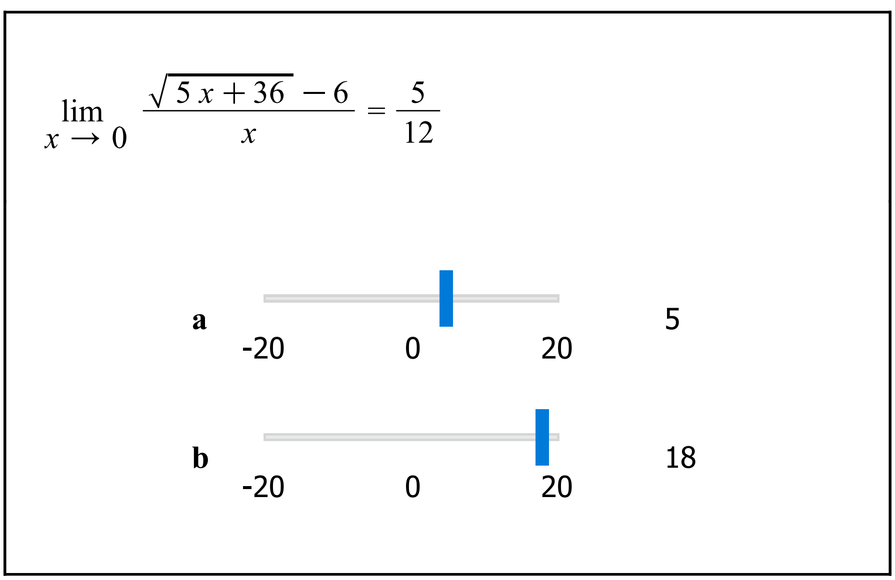
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x}=1$$

determinare i valori di a e b.

Soluzione

Possiamo vedere direttamente con due slider che valore assume il limite al variare di a e b.

$$Explore\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a\cdot x+2b}-6}{x}, parameters=[a=-20..20, b=-20..20]\right)$$



Possiamo quindi osservare, da una rapida esplorazione, che il valore del limite è indefinito per quasi tutti i valori di b, mentre l'unico caso in cui si ha un valore è per b=18.

Infatti, essendo il limite per x che tende a 0, possiamo sostituire x con 0 ed otteniamo che:

$$\frac{\sqrt{a \cdot 0 + 2\,b} - 6}{0}$$

che è definito solo nel caso in cui $\sqrt{2\,b} + 6 = 0 \Rightarrow b = 18$.
Inoltre, dopo aver ottenuto il valore di b, possiamo cercare il valore di a che soddisfa la nostra richiesta e vediamo che è solo uno il valore, ovvero $a = 12$. E' possibile fare dunque una verifica.
Per prima cosa riscriviamo il limite, sostituendo il valore di b trovato:

$$subs\left(b = 18, \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a \cdot x + 2\,b} - 6}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a\,x + 36} - 6}{x} \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

Si può a questo punto razionalizzare il numeratore e si ottiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a \cdot x + 36} - 6}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a \cdot x + 36} - 6}{x} \cdot \frac{\sqrt{a \cdot x + 36} + 6}{\sqrt{a \cdot x + 36} + 6} = \lim_{x \to 0} \frac{a \cdot x + 36 - 36}{x \cdot \left(\sqrt{a \cdot x + 36} + 6\right)}$$

semplificando:

$$simplify\left(\frac{a \cdot x + 36 - 36}{x \cdot \left(\sqrt{a \cdot x + 36} + 6\right)}\right)$$

$$\frac{a}{\sqrt{a\,x + 36} + 6} \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

facendo il limite otteniamo che $\lim_{x \to 0} \frac{a}{\sqrt{a\,x + 36} + 6}$

$$\frac{1}{12}\,a \qquad \textbf{(3.1.3)}$$

limite che vale 1 solo nel caso in cui $\frac{1}{12} a = 1 \Rightarrow a = 12$.

Quesito 4

restart :
Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo [0, 2] viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia $\frac{4}{3}$?

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

Soluzione

Possiamo calcolare il valore medio generato risolvendo l'integrale:

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x \cdot \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3\right)\mathrm{d}x$$

ovvero:

$$M(X) = evalf[3]\left(\int_0^2 \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4 \, dx\right)$$

$$M(X) = 1.20 \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

Per quanto riguarda invece il calcolo della probabilità che il primo valore estratto sia $\frac{4}{3}$, abbiamo, trattandosi di una distribuzione continua, il risultato è zero. Infatti:

$$P\left(X = \frac{4}{3}\right) = \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{4}{3}} \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \, dx$$

$$P\left(X = \frac{4}{3}\right) = 0 \qquad \textbf{(4.1.2)}$$

Per quanto riguarda la probabilità che il secondo estratto sia minore di 1, abbiamo:

$$P(X < 1) = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \, dx$$

$$P(X < 1) = \frac{5}{16} \qquad \textbf{(4.1.3)}$$

Quesito 5

restart :

Dati i punti $A(-2, 3, 1)$, $B(3, 0, -1)$, $C(2, 2, -3)$ determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C.

Soluzione

$A := [-2, 3, 1]$

$$[-2, 3, 1] \qquad \textbf{(5.1.1)}$$

$B := [3, 0, -1]$

$$[3, 0, -1] \qquad \textbf{(5.1.2)}$$

Per due punti A e B passa una e una sola retta.

La direzione di questa retta è data dal vettore AB, che ha componenti

$v := B - A$

$$[5, -3, -2] \qquad \textbf{(5.1.3)}$$

La retta inoltre passa per il punto B, dunque in forma parametrica è data da

$r := expand(B + t \cdot v)$

$$[3 + 5\,t, -3\,t, -1 - 2\,t] \qquad \textbf{(5.1.4)}$$

Possiamo scrivere la retta anche come intersezione di due piani, ricavando t dalle varie componenti della retta:

$piano1 := solve(x = \textbf{(5.1.4)}[1], t) = solve(y = \textbf{(5.1.4)}[2], t);$

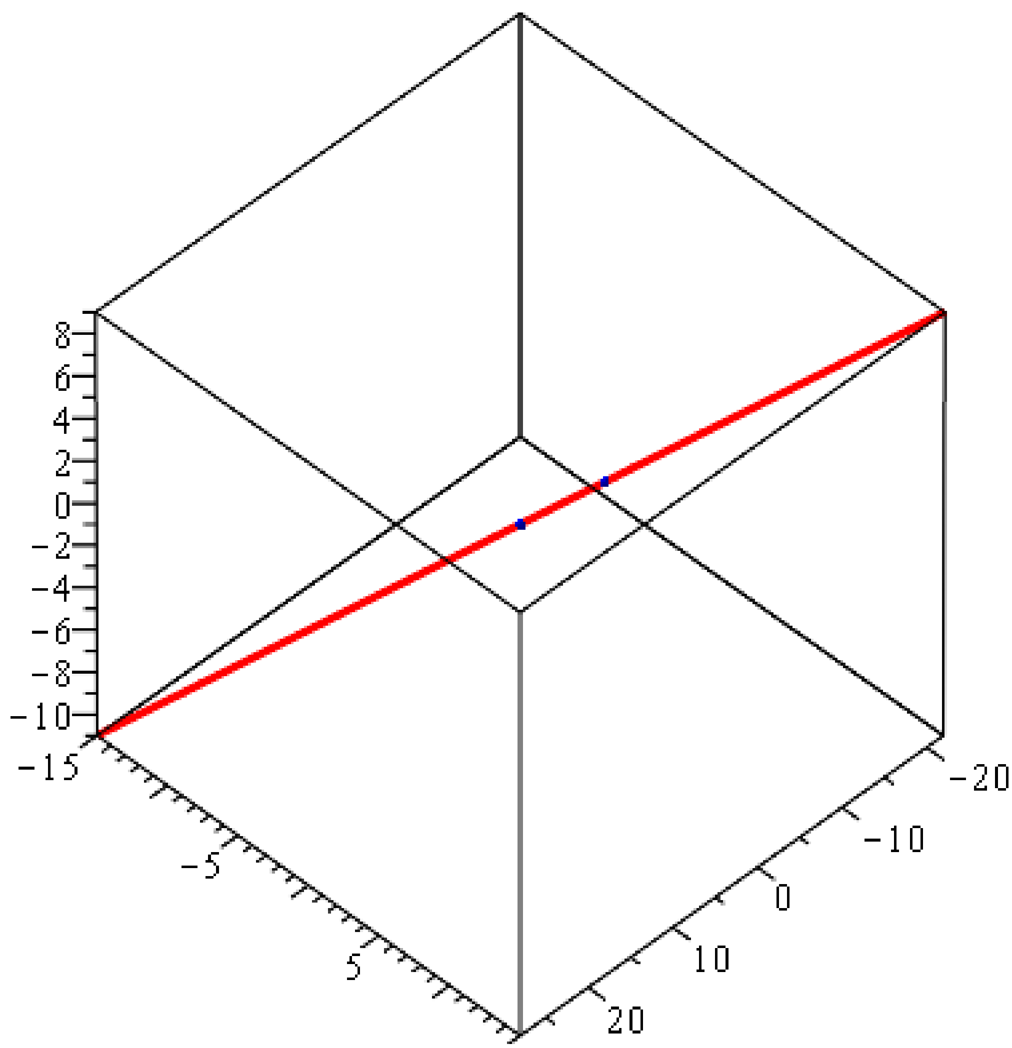
$piano2 := solve(y = \textbf{(5.1.4)}[2], t) = solve(z = \textbf{(5.1.4)}[3], t);$

$$-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}x=-\frac{1}{3}y$$
$$-\frac{1}{3}y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z$$

$$-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}x=-\frac{1}{3}y$$
$$-\frac{1}{3}y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z \qquad \textbf{(5.1.6)}$$

Rappresentiamo la retta nello spazio insieme con i due punti A e B.

$plots[display](plots[spacecurve](r, t=-5..5, color=red, thickness=3), plots[pointplot3d]([A, B], color=blue, thickness=3, symbol=solidcircle))$



Il piano deve essere perpendicolare al vettore AB e passante per il punto C

$C := [2, 2, -3]$

$$[2, 2, -3]$$

Quindi è della forma

$\mathrm{pi} := v[1]\cdot x+v[2]\cdot y+v[3]\cdot z+d=0$

$$d+5x-3y-2z=0 \qquad \textbf{(5.1.8)}$$

Se imponiamo il passaggio per C otteniamo

$subs(\{x = C[1], y = C[2], z = C[3]\}, \text{pi})$

$$d + 10 = 0 \tag{5.1.9}$$

$solve(\textbf{(5.1.9)}, d)$

$$-10 \tag{5.1.10}$$

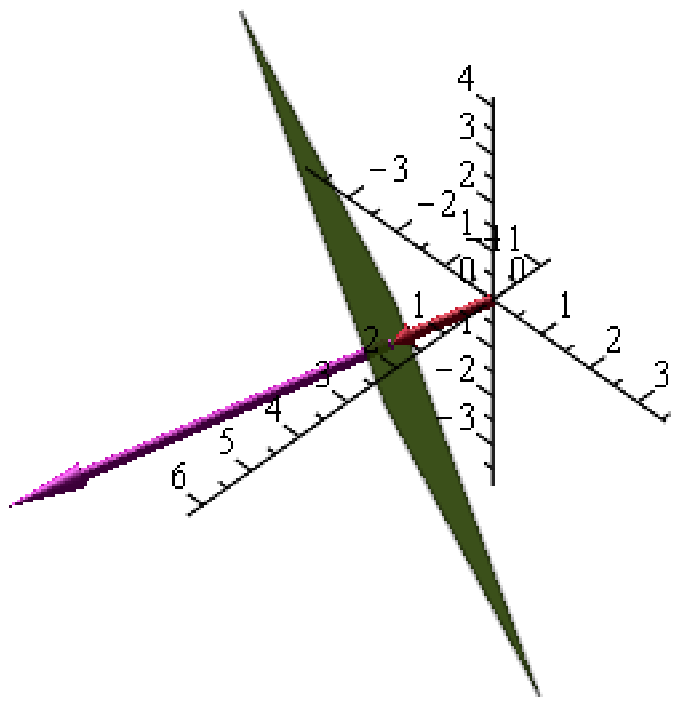
Dunque il piano ha equazione

$\text{pi} := subs(d = -10, \text{pi})$

$$-10 + 5x - 3y - 2z = 0 \tag{5.1.11}$$

Rappresentiamo il piano

$Student[LinearAlgebra][PlanePlot](\text{pi}, [x, y, z], caption = \text{"Piano } \pi \text{ insieme al vettore normale"})$



Piano π insieme al vettore normale

Interattivamente, inserisci tre punti

$A =$ (-2,3,1)

$B =$ (3,0,-1)

$C =$ (2,2,-3)

Retta r passante per A e B: $[3+5\,t,\ -3\,t,\ -1-2\,t]$

Piano π ortogonale a r e passante per C:

$-10+5\,x-3\,y-2\,z=0$

Quesito 6

restart :

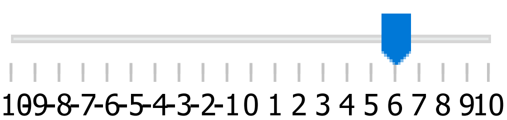
Determinare il numero reale a in modo che il valore di

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^a}$$

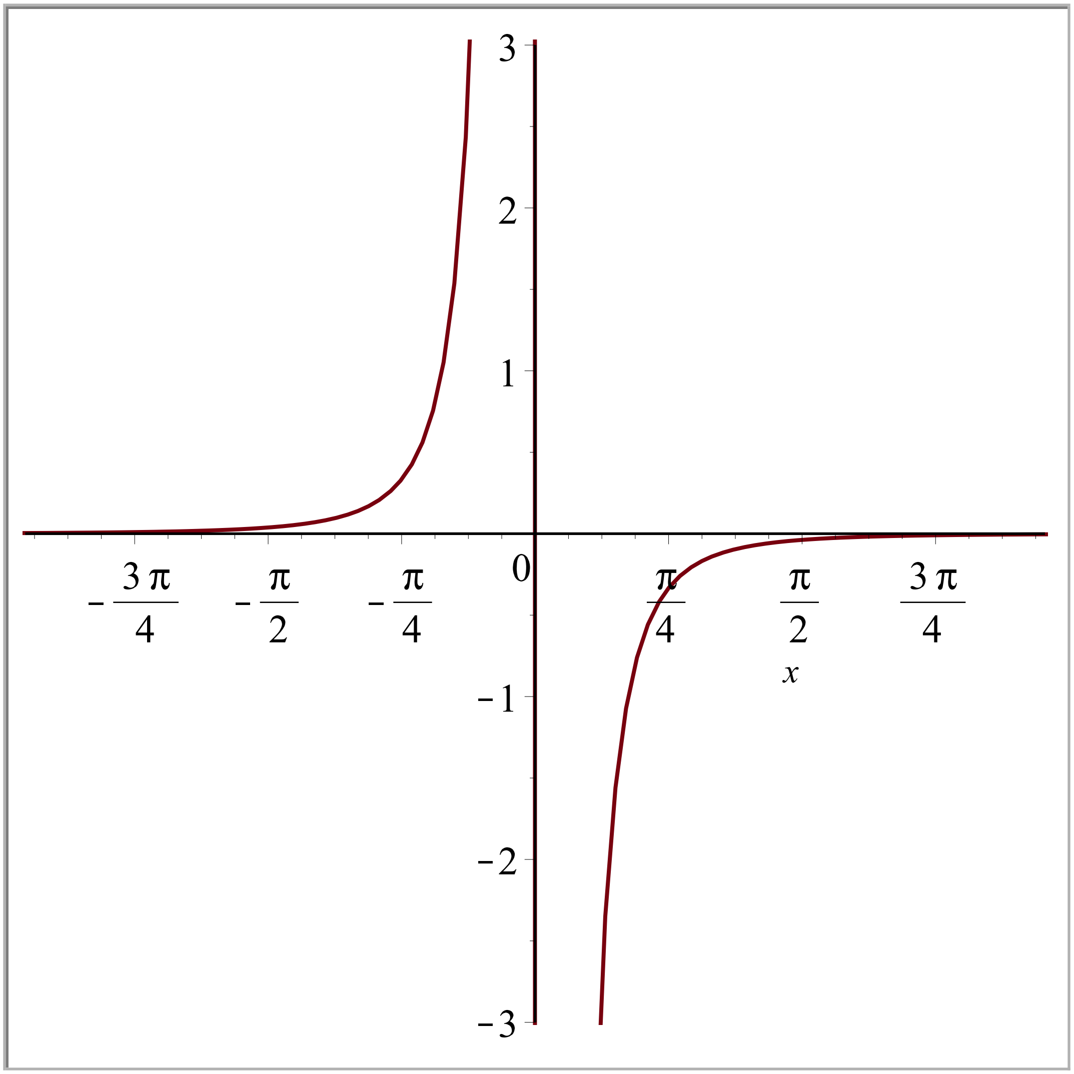
sia un numero reale non nullo.

Soluzione

Effettuiamo uno studio qualitativo del comportamento della funzione $f(x)=\dfrac{\sin(x)-x}{x^a}$ al variare del parametro a, in un intorno del punto $x=0$, analizzando il grafico:

$a=$ 

(scorrere il cursore a destra e sinistra per osservare il grafico della funzione per il relativo valore del parametro a)



Per semplicità abbiamo considerato solo valori del parametro a interi. Ristretto a questi valori di a il grafico sembra restituirci le seguenti informazioni:
$a \in \mathbb{Z}, a \leq 3 \Rightarrow$ il valore del limite $l \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{Z}, a > 3 \Rightarrow$ il valore del limite l può essere -∞ o non definito

Passiamo ora allo studio quantitativo: effettuiamo i calcoli.
Se $a \in \mathbb{R}, a \leq 0$ otteniamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^a} = 0$$

Consideriamo ora il caso $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Otteniamo, applicando il Teorema di De l'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^a} = \left[\frac{0}{0} \rightarrow \text{F.I.}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{a \cdot x^{a-1}} = \left[\frac{0}{0} \rightarrow \text{F.I.}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{a(a-1) \cdot x^{a-2}} = \left[\frac{0}{0} \rightarrow \text{F.I.}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{a(a-1)(a-2) \cdot x^{a-3}}$$

che è un numero reale non nullo $\Leftrightarrow$ se $a = 3$.

Infatti abbiamo che:

$$limit\left(\frac{\sin(x)-x}{x^3}, x=0\right)$$

$$-\frac{1}{6} \tag{6.1.1}$$

Possiamo arrivare allo stesso risultato esplicitando i passaggi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\to \text{F.I.}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{3\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)=-\frac{1}{6}$$

dove abbiamo utilizzato il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$

Osserviamo infine: se $a\in\mathbb{R}$, $0<a<3$

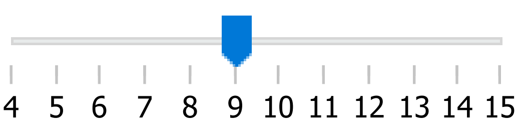
$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{a(a-1)(a-2)\cdot x^{a-3}}=0$$

mentre se $a\in\mathbb{R}$, $a>3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{a(a-1)(a-2)\cdot x^{a-3}}=\infty$$

e occorre analizzare il limite destro ed il limite sinistro per decidere se il valore del limite l sia $-\infty$ o non definito.

Di seguito uno strumento per verificare il valore del limite se $a\in\mathbb{Z}$, $a>3$

$a=$ 

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^a}=$ $-\infty$

Quesito 7

restart :

Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione:

$$x+2y-z+1=0$$

nel suo punto P di coordinate $(1, 0, 2)$.

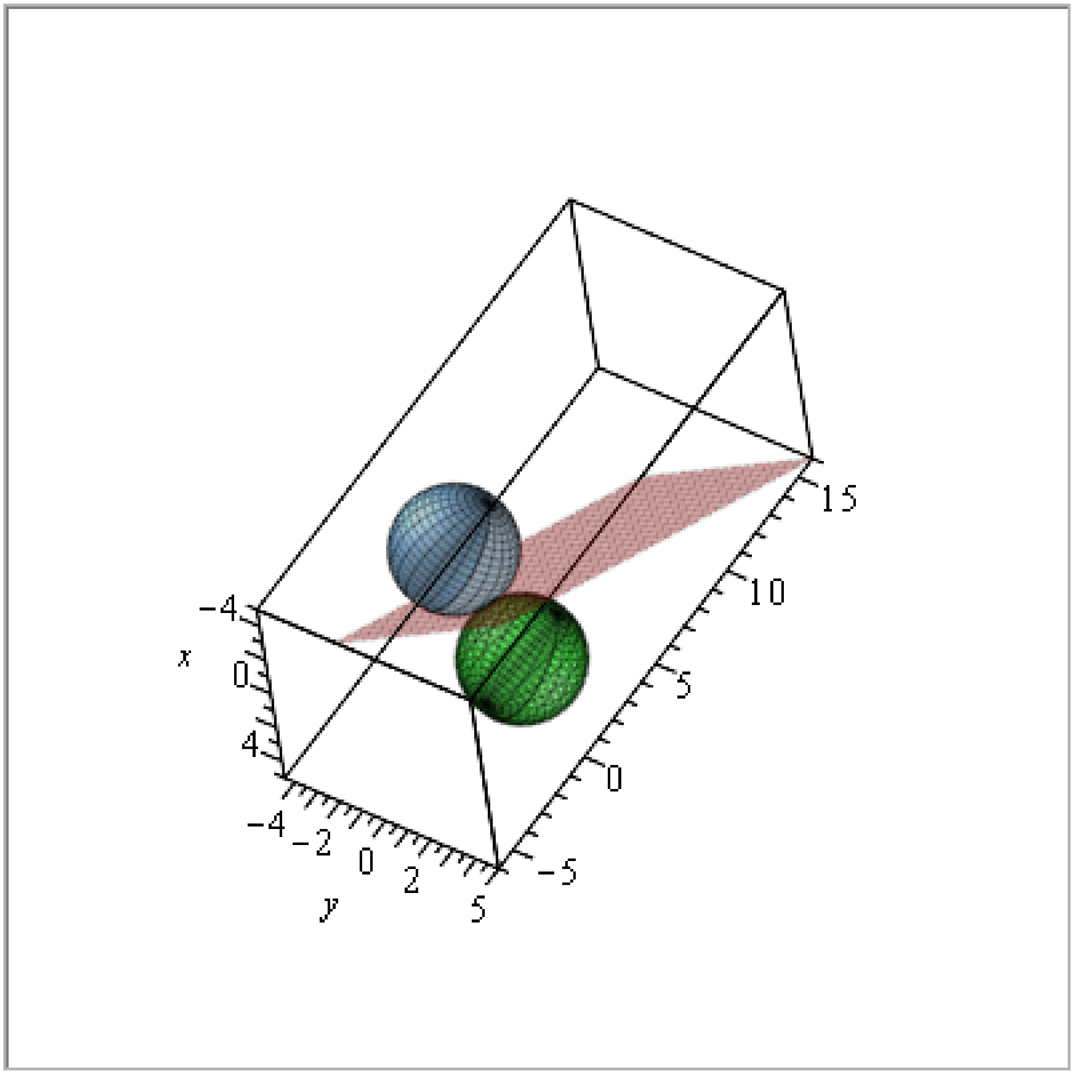
Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione:

$$x+2y-z+1=0$$

nel suo punto P di coordinate $(1, 0, 2)$.

Soluzione

Grafico



La retta r passante per P e perpendicolare al piano π ha equazione:

with(*geom3d*) :
point(*P*, 1, 0, 2), *plane*(*p*, $x + 2 \cdot y - z + 1 = 0$, [*x*, *y*, *z*]) :
line(*r*, [*P*, *p*]) :
Equation(*r*,'*t*')

$$[1 + t, 2\,t, 2 - t] \quad \textbf{(7.1.1)}$$

Quindi i centri delle sfere hanno coordinate del tipo $C(1 + t, 2\,t, 2 - t)$.
Essendo la distanza tra il centro delle sfere e il punto P uguale al raggio r=$\sqrt{6}$ abbiamo che:

$$\sqrt{(1 + t - 1)^2 + (2\,t)^2 + (2 - t - 2)^2} = \sqrt{6}$$

ossia:
distance(*P*, *point*(*C*, $1 + t$, $2\,t$, $2 - t$))

$$\sqrt{6}\,\sqrt{t^2} \quad \textbf{(7.1.2)}$$

Svolgiamo l'equazione e troviamo:
solve($\sqrt{6} \cdot \sqrt{t^2} = \sqrt{6}$, [*t*])

$$[[t = 1], [t = -1]] \quad \textbf{(7.1.3)}$$

eval(**(7.1.1)**, $t = 1$)

$$[2, 2, 1] \quad \textbf{(7.1.4)}$$

$eval(\textbf{(7.1.1)}, t=-1)$

$$[0, -2, 3] \quad \textbf{(7.1.5)}$$

Quindi le due sfere hanno centro rispettivamente nei punti $C_1 = (2; 2; 1)$ e $C_2 = (0; -2; 3)$.

Quesito 8

restart :
Un dado ha la forma di un dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

Soluzione

Denotiamo con:
E_3 l'evento: "esce la faccia contrassegnata dal numero 3".
E_i l'evento: " esce qualunque altra faccia delle rimanenti".
A l'evento: "il numero 3 si presenta almeno 2 volte in 5 lanci".
A_i l'evento: "il numero 3 si presenta i volte in 5 lanci".

La probabilità che si presenti la faccia contrassegnata dal numero 3 è P(E_3) = $\frac{2}{13}$ =

$$convert\left(\frac{2}{13}, float, 3\right)$$

$$0.154 \quad \textbf{(8.1.1)}$$

Ossia, 15.4%.

La probabilità che si presenti ciascuna delle rimanenti 11 facce è P(E_i)= $\frac{1}{13}$, $\forall$i 12 $\wedge$ i 3.

Infatti, abbiamo che la P(E_3) = 2 P(E_i) e che $P\left(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_{12}\right) = 1$.

Inoltre, se applichiamo il teorema di Bernoulli, otteniamo:

$$P(A) = 1 - P(A_0) - P(A_1) = 1 - \left(\frac{11}{13}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{11}{13}\right)^4\left(\frac{2}{13}\right) =$$

$$convert\left(1 - \left(\frac{11}{13}\right)^5 - \binom{5}{1}\cdot\left(\frac{11}{13}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{13}\right), float, 2\right)$$

$$0.17 \quad \textbf{(8.1.2)}$$

Quindi, 17 %

Quesito 9

restart :
Dimostrare che l'equazione:

$$\arctan(x) + x^3 + e^x = 0$$

ha una e una sola soluzione reale.

Soluzione

Applichiamoil teorema di Bolzano (o di esistenza degli zeri) alla funzione y=
$f(x) = \arctan(x) + x^3 + e^x$
definita e continua in ℝ, con

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\arctan(x) + x^3 + \exp(x)\right)$$

$$\infty \tag{9.1.1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\arctan(x) + x^3 + \exp(x)\right)$$

$$-\infty \tag{9.1.2}$$

<u>Enunciato</u> Sia f : [a,b]→ℝ una funzione continua. Supponiamo f(a) e f(b) di segno opposto, ovvero:

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ oppure } f(b) < 0 < f(a)$$

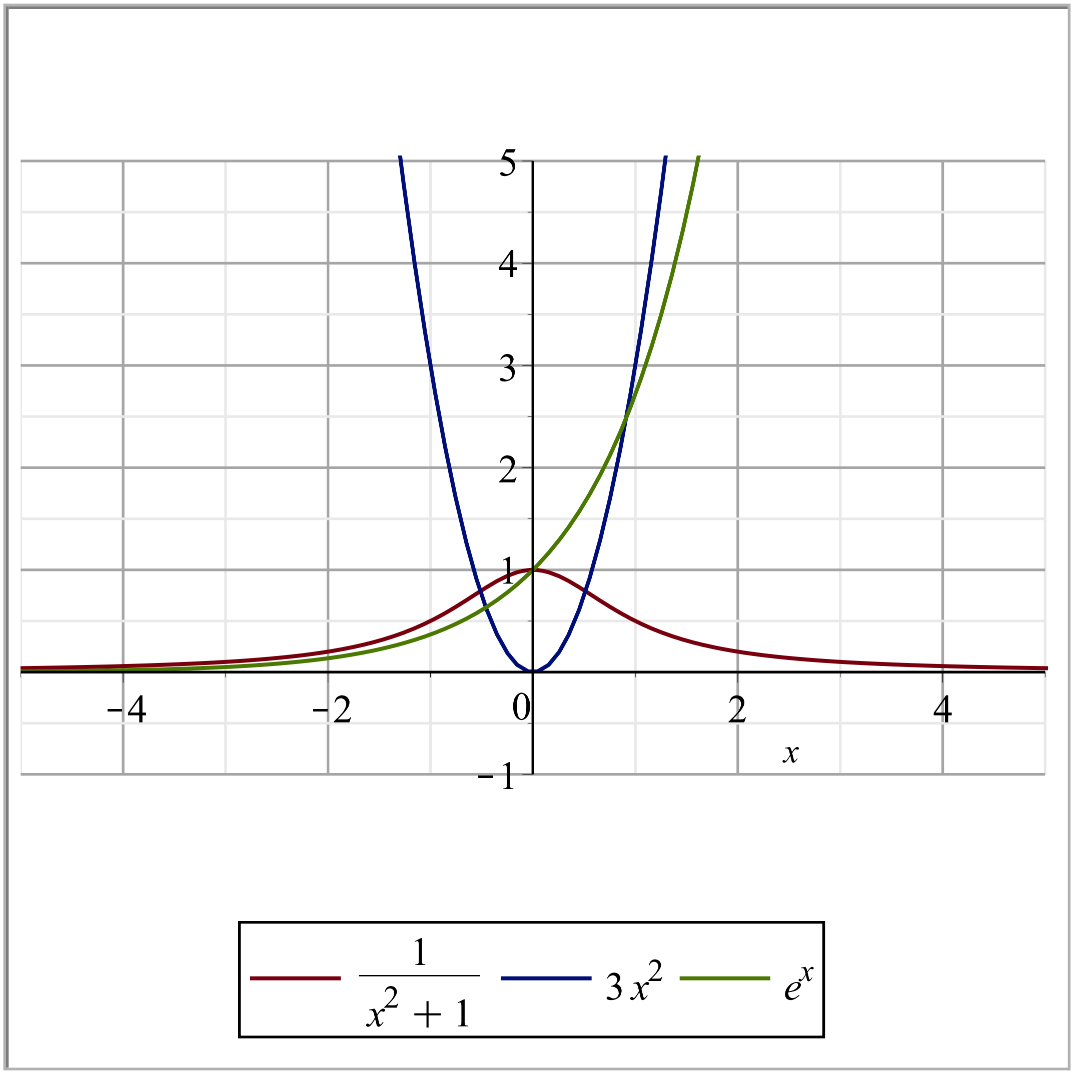
Allora esiste almeno un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$.

Per dimostrare l'unicità della soluzione, si verifica la monotonia della funzione f(x), calcolando la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\arctan(x) + x^3 + \exp(x)\right)$$

$$\frac{1}{x^2 + 1} + 3x^2 + e^x \tag{9.1.3}$$

<u>Grafico dei termini della derivata</u>



f'(x) è definita in **R** e sempre positiva poichè somma di funzioni positive (primo e terzo termine) e non negativa (secondo termine). Dunque la funzione risulta strettamente crescente nel dominio e quindi intersecherà l'asse delle ascisse in un unico punto la cui ascissa è l'unica soluzione dell'equazione data.

Quesito 10

restart :
Data la funzione:

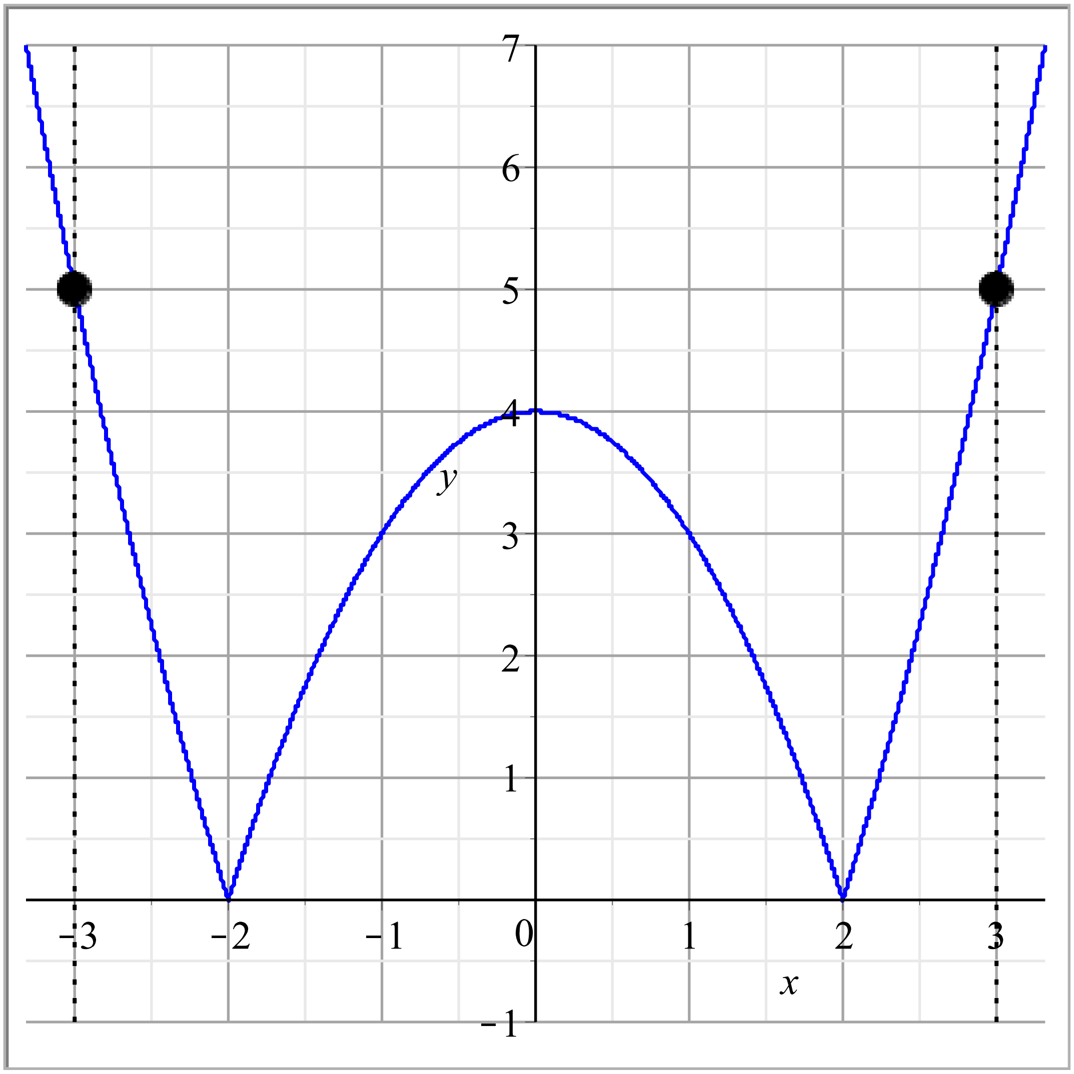
$$f(x) = |4 - x^2|$$

verificare che essa non soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo [-3;3] e che comunque esiste almeno un punto dell'intervallo [-3;3] in cui la derivata prima di $f(x)$ si annulla. Questo esempio contraddice il teorema di Rolle? Motivare la risposta in maniera esauriente.

Soluzione

Teorema di Rolle Sia f : [a,b]→ℝ. Se f è continua in [a,b], derivabile in (a,b) e se vale f(a)=f(b), allora esiste almeno un punto c∈(a,b) tale che f'(c)=0.

Per verificare che le ipotesi del teorema siano soddisfatte, generiamo il grafico della funzione data:



Il grafico della funzione f(x)=|4-x^2| presenta due punti angolosi in x=± 2, quindi la funzione non è derivabile in due punti dell'intervallo aperto]-3;3[.
Non verifica pertanto alle ipotesi del teorema di Rolle, ma la funzione ha un punto stazionario in x=0, infatti:

$$f'(0)=\left.\frac{d}{dx}\,|4-x^2|\right|_{x=0}$$

$$0 \qquad \textbf{(10.1.1)}$$

Tale esempio non contraddice il teorema di Rolle, perchè non è detto che in assenza di alcune delle ipotesi del teorema, la tesi non possa comunque valere.