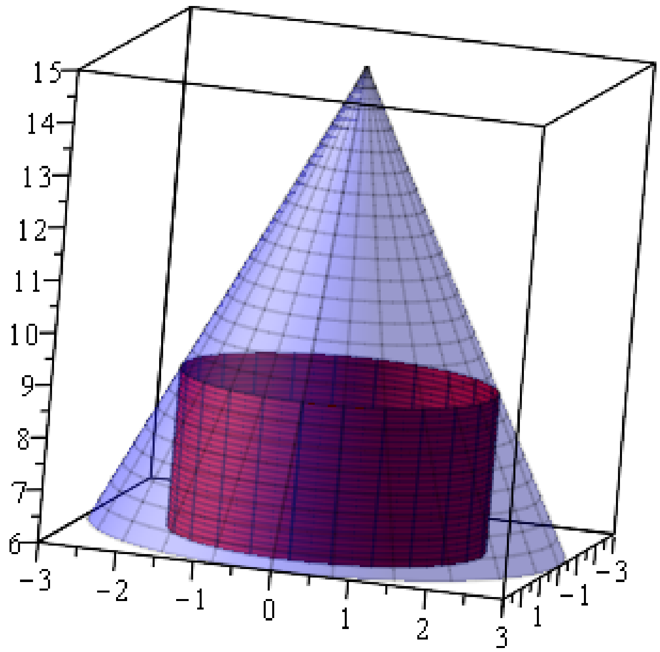
Maturità 2018
Seconda Prova
Tema di Matematica
Quesiti 1 - 5

Quesito 1

Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.

Soluzione

```
restart
with(plots) :
with(plottools) :
cono := plot3d([r*cos(theta), r*sin(theta), -3*r + 15], r = 0..3, theta = 0..2*Pi, transparency
    = 0.6, color = blue) :
cilindro := plot3d([2*cos(theta), 2*sin(theta), z], theta = 0..2·Pi, z = 6..9, color = red) :
display(cono, cilindro)
```



L'obiettivo del quesito è di verificare che il rapporto tra i volumi del cono e del cilindro sia inferiore a $\frac{1}{2}$. Per dimostrarlo, è necessario dapprima calcolare i volumi in questione.

Sia h_1 l'altezza del cono e r il suo raggio, il volume del cono si calcola attraverso la seguente formula:

$V_1 := \frac{h_1 \cdot r^2 \cdot \pi}{3}$

$$\frac{1}{3} h_1 r^2 \pi \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

Per quanto riguarda invece il cilindro, sappiamo che il rapporto tra la differenza $r - x$ (dove x è il raggio del cilindro) e la sua altezza h_2 equivale al rapporto tra il raggio e l'altezza del cono, per i criteri di similitudine dei triangoli . Ricaviamo quindi h_2 in funzione di x:

$h_2 := solve\left(\frac{r - x}{h_2} = \frac{r}{h_1}, h_2\right)$

$$\frac{(r - x)\ h_1}{r} \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

Ora è possibile calcolare il volume del cilindro, che si ricava dal prodotto dell'area di base per l'altezza:

$V_2 := x^2 \cdot \pi \cdot h_2$

$$\frac{x^2 \pi (r-x) h_1}{r} \tag{1.1.3}$$

Definiamo la funzione $V_2(x) := \frac{x^2 \pi (r-x) h_1}{r}$

$$x \rightarrow \frac{x^2 \pi (r-x) h_1}{r} \tag{1.1.4}$$

In seguito, massimizziamo il volume della funzione cilindro, calcolandone la derivata ed eguagliandola a 0:

$derV_2 := \frac{d}{dx} V_2(x)$

$$\frac{2 x \pi (r-x) h_1}{r} - \frac{x^2 \pi h_1}{r} \tag{1.1.5}$$

$x_1, x_2 := solve(derV_2 = 0, x)$

$$0, \frac{2}{3} r \tag{1.1.6}$$

Per scegliere, tra i due valori ottenuti, quello corretto, è necessario calcolare la derivata seconda della funzione in entrambi i punti e studiare il segno del valore che essa assume nei due casi:

$\frac{d^2}{dx^2} V_2(x)$

$$\frac{2 \pi (r-x) h_1}{r} - \frac{4 x \pi h_1}{r} \tag{1.1.7}$$

$derIIV_2(x) := \frac{2 \pi (r-x) h_1}{r} - \frac{4 x \pi h_1}{r}$

$$x \rightarrow \frac{2 \pi (r-x) h_1}{r} - \frac{4 x \pi h_1}{r} \tag{1.1.8}$$

$simplify(derIIV_2(x_1))$

$$2 \pi h_1 \tag{1.1.9}$$

$simplify(derIIV_2(x_2))$

$$-2 \pi h_1 \tag{1.1.10}$$

Tra i due punti dati, il massimo (locale o globale) è quello in cui la derivata seconda è negativa (poiché la concavità della parabola in quel punto è rivolta verso il basso).

Pertanto, il punto cercato è quello che ha per ordinata $x_2 := \frac{2}{3} r$

$$\frac{2}{3} r \tag{1.1.11}$$

Il volume massimo che può avere un cilindro inscritto in un cono è il seguente:

$V_{2,max} := V_2(x_2)$

$$\frac{4}{27} h_1 r^2 \pi \quad \textbf{(1.1.12)}$$

Calcoliamo infine il rapporto tra il volume del cilindro iscritto e il volume del cono:

$rapporto := \frac{V_{2,max}}{V_1}$

$$\frac{4}{9} \quad \textbf{(1.1.13)}$$

$evalb\left(\frac{4}{9} < \frac{1}{2}\right)$

$$true \quad \textbf{(1.1.14)}$$

Possiamo pertanto affermare che il volume del cilindro è minore della metà dl volume del cono.

Quesito 2

Si dispone di due dadi uguali non bilanciati a forma di tetraedro regolare con le facce numerate da 1 a 4. Lanciando ciascuno dei due dadi, la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Se si lanciano i due dadi contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due numeri uguali tra loro?

Soluzione

restart

Traduciamo dapprima la frase del testo in linguaggio matematico:

- la probabilità di ottenere 3 è il doppio della probabilità che esca 4 ⇒ $P_3 := 2 P_4$

$$2 P_4$$

- la probabilità di ottenere 2 è il doppio della probabilità che esca 3 ⇒ $P_2 := 2 P_3$

$$4 P_4$$

- la probabilità di ottenere 1 è il doppio della probabilità che esca 2 ⇒ $P_1 := 2 P_2$

$$8 P_4 \quad \textbf{(2.1.3)}$$

Sappiamo che la probabilità totale, data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi, dev'essere pari a 1; perciò la probabilità minore (che corrisponde alla probabilità di ottenere 4) vale:

$P_4 := solve(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1, P_4)$

$$\frac{1}{15} \quad \textbf{(2.1.4)}$$

Procedendo a ritroso, è possibile calcolare i valori numerici delle probabilità degli altri eventi considerati, sostituendo il valore di P_4:

P_1

$$\frac{8}{15} \quad \textbf{(2.1.5)}$$

P_2

$$\frac{4}{15} \quad (2.1.6)$$

P_3

$$\frac{2}{15} \quad (2.1.7)$$

Per calcolare la probabilità che, lanciando due dadi, escano due numeri uguali tra loro, è necessario dapprima calcolare la probabilità composta data dal prodotto delle probabilità che escano 1, 2, 3 o 4 dal lancio di entrambi i dati:

$Int1 := P_1 \cdot P_1$

$$\frac{64}{225} \quad (2.1.8)$$

$Int2 := P_2 \cdot P_2$

$$\frac{16}{225}$$

$Int3 := P_3 \cdot P_3$

$$\frac{4}{225}$$

$Int4 := P_4 \cdot P_4$

$$\frac{1}{225} \quad (2.1.11)$$

Infine calcoleremo la probabilità dell'unione di questi eventi, poiché la probabilità che escano due numeri uguali equivale alla probabilità che si verifichi almeno uno dei quattro eventi descritti.

$P_E := Int1 + Int2 + Int3 + Int4$

$$\frac{17}{45} \quad (2.1.12)$$

Quesito 3

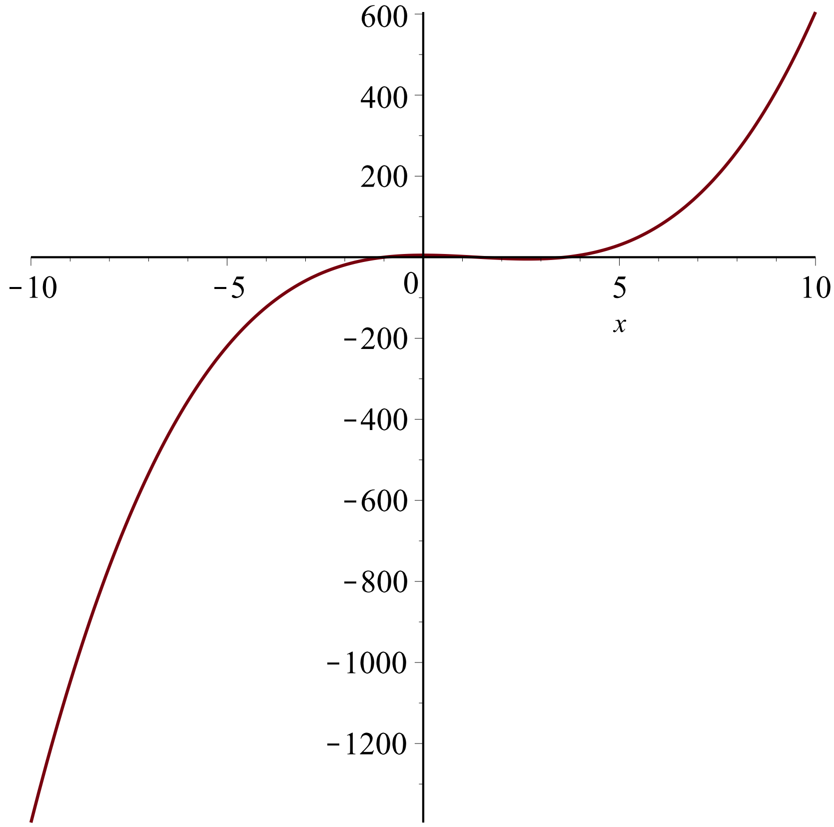
Determinare i valori di k tali che la retta di equazione $y = -4\,x + k$ sia tangente alla curva di equazione $y = x^3 - 4\,x^2 + 5$.

Soluzione

restart

Rappresentiamo dapprima la curva di equazione $y = x^3 - 4\,x^2 + 5$

$plot(x^3 - 4\,x^2 + 5)$



La retta tangente è definita a partire dall'equazione della retta generica: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$, dove x_0 e y_0 sono le coordinate del punto di tangenza tra la retta e la curva data.
Nel nostro caso, dovremo ricavare le coordinate dei punti di tangenza, in modo da risalire successivamente ai valori di k.
Sarà dunque necessario uguagliare le seguenti due espressioni:
$y = m \cdot x + (y_0 - m \cdot x_0)$
$y = -4 \cdot x + k$
Pertanto, possiamo affermare che $m := -4$

$$-4 \tag{3.1.1}$$

e che $k := y_0 - m \cdot x_0$

$$-m\, x_0 + y_0$$

Sappiamo inoltre che il coefficiente angolare della retta tangente coincide con la derivata della curva nei punti di tangenza. Deriviamo perciò la funzione $f(x) := x^3 - 4\,x^2 + 5$

$$x \rightarrow x^3 - 4\,x^2 + 5$$

$derf := f'(x)$

$$3\,x^2 - 8\,x \tag{3.1.4}$$

Ora ricaviamo i valori di x per cui $f'(x) = m = -4$:

$x_1, x_2 := solve(derf = -4, x)$

$$2, \frac{2}{3} \tag{3.1.5}$$

Calcoliamo inoltre le ordinate dei punti di tangenza:

$y_1 := eval(x^3 - 4x^2 + 5, x = x_1)$

$$-3 \tag{3.1.6}$$

$y_2 := eval(x^3 - 4x^2 + 5, x = x_2)$

$$\frac{95}{27} \tag{3.1.7}$$

Infine, è possibile sostituire i valori ottenuti per ricavare le costanti k_1 e k_2 per cui la retta data è tangente alla curva:

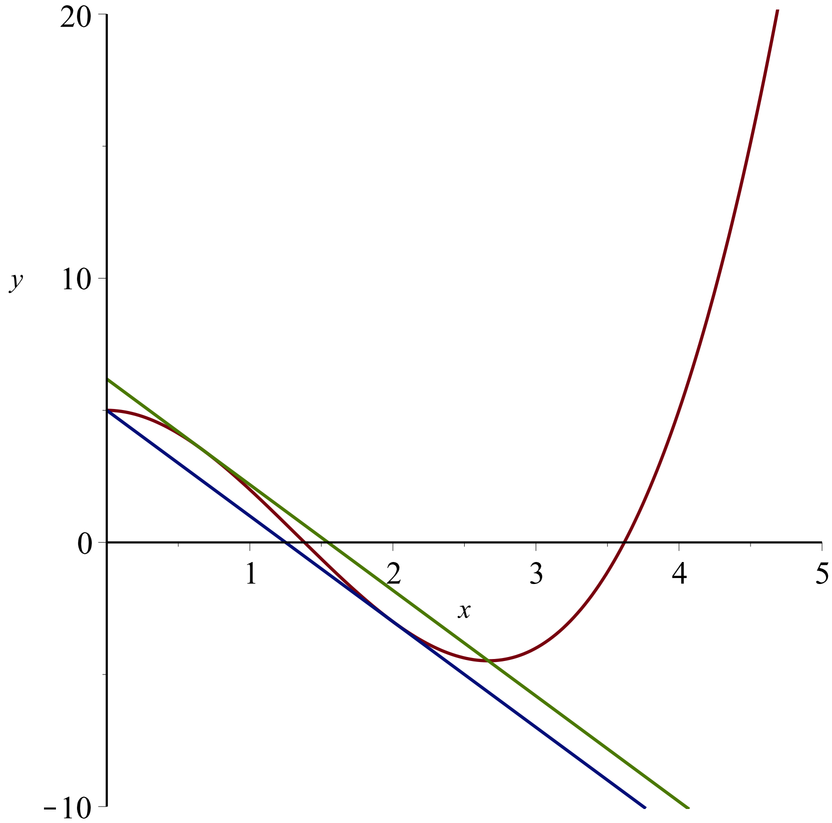
$k_1 := y_1 - m \cdot x_1$

$$5 \tag{3.1.8}$$

$k_2 := y_2 - m \cdot x_2$

$$\frac{167}{27} \tag{3.1.9}$$

$plot([x^3 - 4x^2 + 5, -4x + k_1, -4x + k_2], x = 0..5, y = -10..20)$



Quesito 4

Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{\left(3\,x - e^{\sin(x)}\right)}{5 + e^{-x} - \cos(x)}$, determinare, se esistono, i valori di $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, giustificando adeguatamente le risposte fornite.

Soluzione

restart

1. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Dal fatto che $-1 \leq \sin(x) \leq +1$, si deduce che $\dfrac{1}{e} \leq e^{\sin(x)} \leq e$.

Pertanto, per quanto riguarda il numeratore, $\lim_{x \to +\infty} \left(3\,x - e^{\sin(x)}\right) \geq \lim_{x \to +\infty} \left(3\,x - e\right)$.

Per quanto riguarda invece il denominatore, $-1 \leq \cos(x) \leq +1$ e per $x \geq 0$ si ha che $0 < e^{-x} \leq 1$: perciò otteniamo che $4 \leq 5 + e^{-x} - \cos(x) \leq 7$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(3x - e^{\sin(x)}\right)}{5 + e^{-x} - \cos(x)} \geq \lim_{x \to +\infty} \frac{(3x - e)}{7} = +\infty$$

Pertanto, possiamo asserire che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(3x - e^{\sin(x)}\right)}{5 + e^{-x} - \cos(x)} = +\infty$$

2. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Come nel caso discusso precedentemente, $e^{\sin(x)}$ e $\cos(x)$ sono funzioni limitate, poiché sono sempre comprese tra due valori finiti. Pertanto sussiste la relazione

$$\frac{\left(3x - e^{\sin(x)}\right)}{5 + e^{-x} - \cos(x)} \sim \frac{x}{e^{-x}} \text{ per } x \to -\infty$$

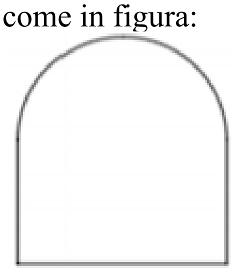
Ora, il limite $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ dà luogo ad una forma indeterminata.

Sarà dunque necessario applicare alla funzione data la regola di De l'Hôpital per calcolare il limite. Si otterrà un numeratore limitato per x che tende a $-\infty$ e un denominatore che tende a $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3 - \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}}{5 - e^{-x} + \sin(x)} = 0$$

Quesito 5

Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:

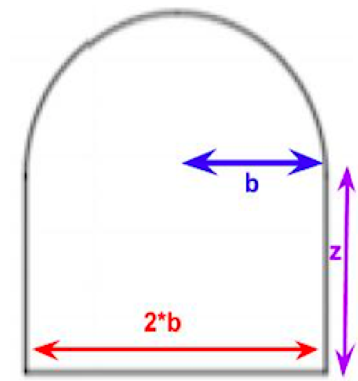


Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

Soluzione

restart

L'area della figura si calcola a partire dalla somma delle aree delle due figure in essa contenute: il rettangolo e la semicirconferenza.



Definendo b il raggio della semicirconferenza, z l'altezza del rettangolo e A_1 e A_2 rispettivamente l'area del rettangolo e della semicirconferenza, otteniamo le seguenti relazioni:

- $A_1 := 2 \cdot b \cdot z$

$$2\, b\, z \tag{5.1.1}$$

- $A_2 := \dfrac{\pi \cdot b^2}{2}$

$$\frac{1}{2}\, \pi\, b^2 \tag{5.1.2}$$

Conosciamo inoltre la relazione tra b e z, data dalla misura del perimetro della figura:

$p := 2 \cdot b + 2 \cdot z + \pi \cdot b$

$$\pi\, b + 2\, b + 2\, z \tag{5.1.3}$$

che deve essere uguale a 2 (ovvero ai metri di staccionata a disposizione).
Risolvendo l'equazione rispetto a z, è possibile ottenere una formula di z in funzione del raggio b:

$z := solve(2 \cdot b + 2 \cdot z + \pi \cdot b = 2, z)$

$$-\frac{1}{2}\, \pi\, b - b + 1 \tag{5.1.4}$$

Calcoliamo dunque l'area totale della figura, sommando le singole aree, dopo aver sostituito z con la funzione di b:

$A_{tot} := A_1 + A_2$

$$2\, b \left(-\frac{1}{2}\, \pi\, b - b + 1\right) + \frac{1}{2}\, \pi\, b^2 \tag{5.1.5}$$

simplify(**(5.1.5)**)

$$-\frac{1}{2}\, \pi\, b^2 - 2\, b^2 + 2\, b \tag{5.1.6}$$

A questo punto, è possibile derivare la funzione dell'area e cercare i valori di b per cui tale funzione si annulla: otterremo così i valori dei lati del rettangolo per cui abbiamo area totale massima.
In modo equivalente si può notare che, rispetto alla variabile b, il luogo dei punti è una parabola con la concavità verso il basso, per cui il punto di massimo si avrà nel vertice.

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, b}\, A_{tot}$

$$-2\,b+2+2\,b\left(-\frac{1}{2}\,\pi-1\right) \tag{5.1.7}$$

$solve\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,b}\,A_{tot}=0,\,b\right)$

$$\frac{2}{4+\pi} \tag{5.1.8}$$

Possiamo infine calcolare la base e l'altezza del rettangolo:

$Base := 2\cdot$**(5.1.8)**

$$\frac{4}{4+\pi} \tag{5.1.9}$$

$Altezza := simplify(eval(z,\,b=$**(5.1.8)**$))$

$$\frac{2}{4+\pi} \tag{5.1.10}$$