Descrittori

Nucleo: GEOMETRIA EUCLIDEA E CARTESIANA: Figure geometriche nel piano e nello spazio
Obiettivi: Utilizzare i risultati principali della geometria euclidea, in particolare la geometria del triangolo e del cerchio, le proprietà dei parallelogrammi, la similitudine e gli elementi fondamentali della geometria solida; dimostrare proposizioni di geometria.

IL GELATO

Problema

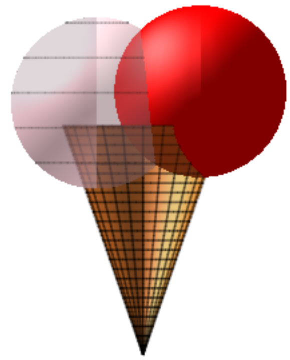
Stefano ha comprato un gelato composto da un cono di altezza 10 cm e diametro 4 cm totalmente riempito e da due palline di gelato alla frutta, che possiamo pensare come sfere di raggio 2,5 cm.

1. Quanto dovrebbe essere alta una coppetta cilindrica di diametro 6 cm se Stefano volesse trasferirvi tutto il gelato?
2. Quanta carta occorre, come minimo, per avvolgere il cono per evitare di sporcarsi? E per avvolgere la coppetta?

Soluzione proposta

Modelliziamo il cono gelato con una rappresentazione tridimensionale di un cono rovesciato sormontato da due sfere.

```
A := cone([0, 0, -2], 0.7, 2, color = "Chocolate", style = patch, transparency = 0.2), sphere([0,-0.4,
   0.2], 0.75, color = pink, style = patchcontour, transparency = 0.5), sphere([0, 0.5, 0.3], 0.75, color
   = red, style = patchnogrid) :
display(A, axes = none, scaling = constrained, orientation = [0, 90])
```



1. Quanto dovrebbe essere alta una coppetta cilindrica di diametro 6 cm se Stefano volesse trasferirvi tutto il gelato?

Dato che Stefano vuole trasferire tutto il gelato, il volume del gelato non cambia. Innanzitutto bisogna calcolare il **volume totale occupato dal gelato** nel cono e nelle due palline.

$with(Student)$:

$V_{tot} := V_{cono} + 2\,V_{pallina}$:

Sia h l'altezza del cono

$h := 10$:

Sia r_{cono} il raggio del cerchio di base del cono e r_{pall} il raggio delle sfere. Calcoliamo il volume del cono e quello della sfera, in cm^3

$r_{cono} := 2$:

$V_{cono} := \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_{cono}{}^2 \cdot h$

$$\frac{40}{3}\,\pi \tag{3.1.1}$$

$r_{pall} := \frac{5}{2}$:

$V_{pall} := \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{pall}{}^3$

$$\frac{125}{6}\,\pi \tag{3.1.2}$$

$V_{tot} := V_{cono} + 2 \cdot V_{pall}$

$$55\,\pi \tag{3.1.3}$$

Arrotondando al più piccolo intero, maggiore o uguale del numero, questo risultato equivale circa a:

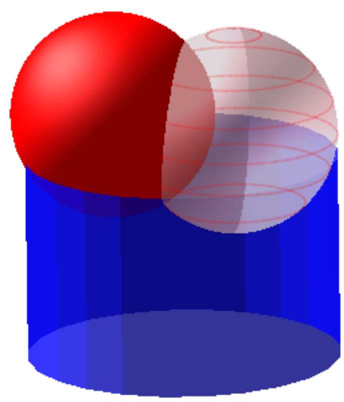
$\mathrm{ceil}(V_{tot})\ cm^3$

$$173\, cm^3 \quad (3.1.4)$$

Calcoliamo, ora, l'**altezza della coppetta cilindrica**, noto il volume che essa deve contenere, pari a $55\,\pi\, cm^3$.

$Coppetta := cylinder([0, 0, -1.5], 1.15, 1.5, transparency = 0.2, style = patchnogrid, color = blue, capped = false), sphere([0, -0.4, 0.2], 0.75, color = pink, style = patchcontour, transparency = 0.5), sphere([0, 0.5, 0.3], 0.75, color = red, style = patchnogrid) :$

$display(Coppetta, scaling = constrained, axes = none, orientation = [-180, 70, 0])$



restart

$V_{coppetta} := 55\,\pi$

$$55\,\pi \quad (3.1.5)$$

Essendo $V_{coppetta} = \pi \cdot r^2 \cdot h$:
e sapendo che

$r := 3$

$$3 \quad (3.1.6)$$

segue che

$h := \frac{V_{coppetta}}{\pi \cdot r^2}$

$$\frac{55}{9} \quad (3.1.7)$$

che, in cm, equivale a circa:

$\mathrm{evalf}[3](h)\, cm$

$$6.11\, cm \quad (3.1.8)$$

e, approssimando al più piccolo intero, maggiore di 6.11 otteniamo:

ceil(h) cm

$$7\ cm \tag{3.1.9}$$

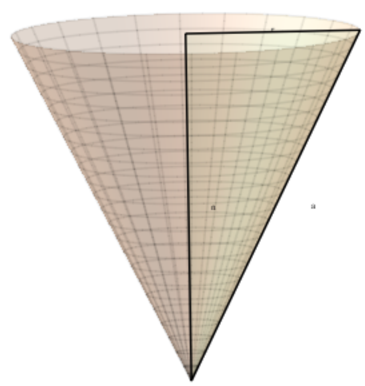
Quindi l'altezza della coppetta dev'essere almeno 7 cm, se avessimo approssimato a 6 cm il volume non era sufficiente.

2. Quanta carta occorre, come minimo, per avvolgere il cono per evitare di sporcarsi? E per avvolgere la coppetta?

Occorrerà tanta carta quanto sono ampie, rispettivamente, la superficie laterale del cono e la superficie della coppetta.

Superficie laterale del cono

Cono := *cone*([0, 0, −2], 0.7, 2, *color* = "Chocolate", *style* = *patch*, *transparency* = 0.8) :
Triangolo := *polygon*([[0, 0, −2], [0, 0, 0], [0.7, 0, 0]], *transparency* = 0.95, *color* = *green*) :
Testo := *textplot3d*({[0.35, 0.1, 0, "r"], [0.1, 0, −1, "h"], [0.5, 0, −1, "a"]}) :
display(*Cono*, *Triangolo*, *Testo*, *labels* = [*x*, *y*, *z*], *axes* = *none*, *orientation* = [−90, 90])



restart
$r := 2$:
$h := 10$:

Sapendo che:

$A_{latcono} = \pi \cdot r \cdot a$, calcoliamo prima, in centimetri, l'apotema del cono applicando il teorema di Pitagora:

$a := \sqrt{(h^2 + r^2)}$

$$2\sqrt{26} \tag{3.2.1.1}$$

Adesso possiamo calcolare l'area della superficie laterale del cono e del cilindro, in cm^2

$A_{latcono} := \pi \cdot r \cdot a$

$$4\pi\sqrt{26} \quad \textbf{(3.2.1.2)}$$

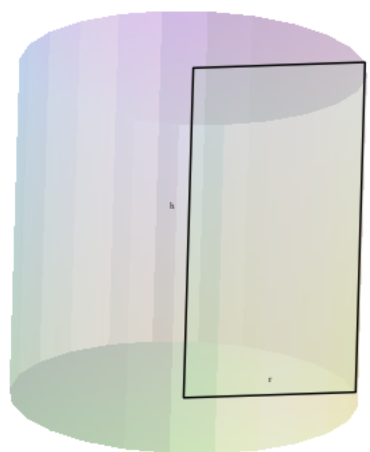
$\mathrm{ceil}(A_{latcono})\ cm^2$

$$65\,cm^2 \quad \textbf{(3.2.1.3)}$$

Approssimando per eccesso, sono necessari, come minimo, $65\,cm^2$ di carta.

Superficie laterale della coppetta

Cilindro := *cylinder*([1, 1, 1], 1, 3, *transparency* = 0.8, *style* = *patchnogrid*) :
Rettangolo := *polygon*([[1, 1, 1], [2, 1, 1], [2, 1, 4], [1, 1, 4]], *transparency* = 0.95, *color* = *green*) :
Testo := *textplot3d*({[1.5, 1, 1.15, "r"], [0.9, 1, 2.75, "h"]}) :
display(*Cilindro*, *Rettangolo*, *Testo*, *orientation* = [270, 100], *axes* = *none*)



restart
$r := 3$:
$h := 7$:
$A_{latcoppetta} := 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$$42\pi \quad \textbf{(3.2.2.1)}$$

$\mathrm{ceil}(A_{latcoppetta})\ cm^2$

$$132 \quad \textbf{(3.2.2.2)}$$

Approssimando per eccesso troviamo che per avvolgere la coppetta serve un tovagliolo con almeno $132\,cm^2$ di superficie.