LE DUE ANIME DEL CALCOLO

Il Calcolo secondo Leibniz - Newton (ATTO PRIMO)

Carissimi alunni della 5C

il vostro professore di matematica ci ha scritto pregandoci di raccontarvi come abbiamo fatto a ideare il metodo per calcolare l'equazione della retta tangente in un punto appartenente ad una curva del piano conoscendo l'equazione (della curva) nella forma $y=f(x)$.

Leggendo la sua lettera abbiamo pensato " Così giovani e già devono arrovellarsi su tali problemi ! " ma il prof ci ha spiegato che nell'epoca in cui vivete queste conoscenze fanno parte di quel bagaglio culturale indispensabile per essere veri protagonisti della vostra vita.

Abbiamo discusso tra noi come presentare questa nostra scoperta e siamo giunti alle seguenti conclusioni :

l'illustrissimo Newton (N) vi spiegherà perché si è arrivati a questo problema e l'illustrissimo Leibniz (L) vi racconterà del metodo usando le quantità infinitesime .

N. perché il problema ?

Tutto nasce dalle idee degli illustrissimi Cartesio e Fermat , i quali trasformarono il piano Euclideo in altra cosa ,trovando il modo di individuare un punto attraverso una coppia di numeri chiamati coordinate . Loro usavano solo coordinate positive mentre io ho pensato anche alle coordinate negative , dividendo il piano in quattro quadranti "

L " La sua idea dei quattro quadranti è stata vincente. Nessuno di questi ragazzi si sognerebbe di disegnare un solo quadrante quando il prof. dice loro di disegnare un piano cartesiano "

N "Però lo chiamano cartesiano e non newtoniano ! "

L "Sig. Newton , Lei è già famoso di suo per tante altre cose matematiche e fisiche .E' Fermat che dovrebbe eventualmente protestare "

N " Io vedo una curva nel piano cartesiano come una <u>traccia</u> lasciata da un punto che si muove secondo una certa <u>legge numerica che lega l'ordinata y all'ascissa x</u> . Al variare del tempo x possiamo calcolare lo spazio y percorso."

L " Io preferisco pensare ad una curva come il disegno (grafico) di una relazione algebrica dove assegno un numero a piacere ad x e determino di conseguenza il valore di y. Per ogni coppia (ascissa , ordinata) che ricavo , disegno un punto nel piano cartesiano e unendo questi punti ottengo il disegno della curva "

N " le interpretazioni saranno diverse ma tutti scriviamo $y=f(x)$ per indicare una generica legge matematica che sarà rappresentata da una curva nel piano cartesiano."
Sempre a quell'epoca l'illustrissimo Galileo Galilei studiò la caduta dei gravi e individuò nella velocità assoluta una grandezza fisica per lo studio dei moti dei corpi. La velocità assoluta è un vettore tangente alla curva in un suo punto e dunque un segmento orientato che giace sulla retta tangente alla curva (in quel punto).

Il problema era trovare il coefficiente angolare m della tangente per poi scrivere l'agognata equazione nella forma $y-y_0=m(x-x_0)$ dove $T(x_0, y_0)$ è il punto sulla curva in comune con la tangente.
Io elaborai un metodo detto "delle flussioni" alquanto oscuro nei significati mentre quello del signor Leibniz , devo ammetterlo (malvolentieri) è risultato (con il senno di poi) vincente .
Dunque a Lui la spiegazione

L. Il Metodo attraverso gli infinitesimali

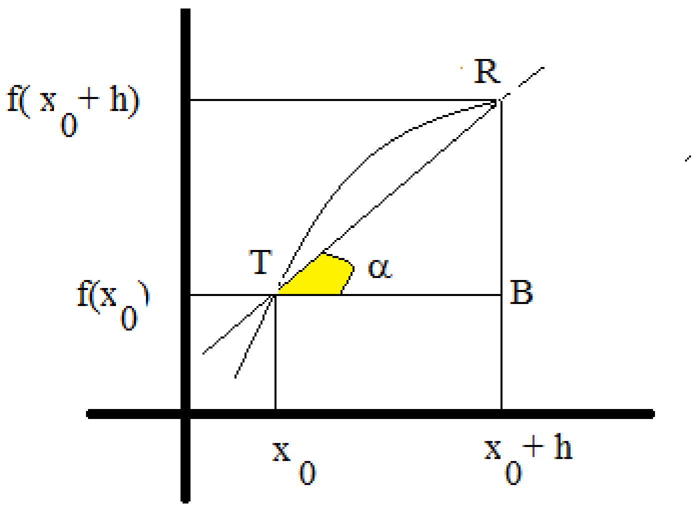
Ho studiato legge e ero ambasciatore presso gli Hannover che mi mandarono a Parigi. Conobbi il monaco matematico Mersenne che mi introdusse allo studio della matematica . In poco tempo imparai diverse cose e altre nuove mi vennero alla mente . In particolare sulle curve del piano osservai quanto segue :

Se $T(x_0, f(x_0))$ è un punto di una curva rappresentata algebricamente dall'espressione

$$y=f(x)$$

prendendo un altro punto vicino $R=(x_0+h, f(x_0+h))$, potevo costruire una retta secante

la quale individua (vedere la figura) il triangolo rettangolo **TRB**
Il rapporto **RB / TB** tra i cateti mi forniva il valore del coefficiente angolare della secante .

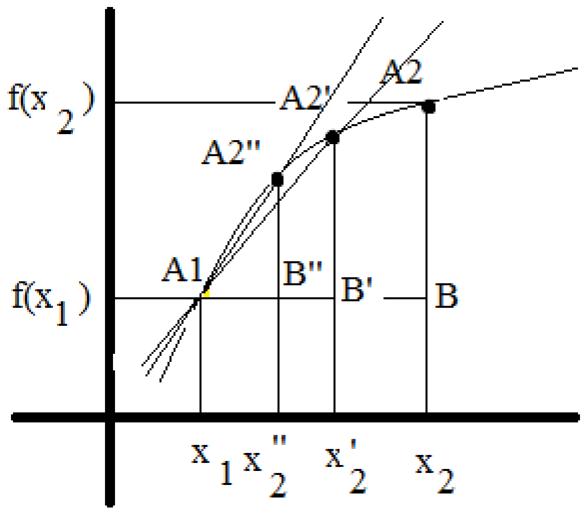


$$m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{RB}{TB} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h-x_0}$$

coefficiente angolare
della retta secante T R

La libertà della scelta del numero h (per allontanarmi di poco dal punto di tangenza T) mi permetteva di <u>pensare ad un numero infinito di numeri h</u> $h>h'>h''>h'''>....$
e le rispettive ascisse $x_2=x_0+h>x ?_2=x_0+h'>x''_2=x_0+h''>.....$

Per ogni h (sempre più piccolo) la retta secante sembrava sempre di più la tangente tanto cercata.

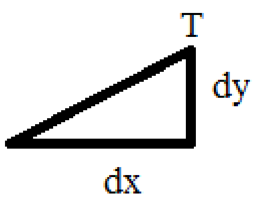


Allora mi parve chiaro che <u>in un estremo atto di pensiero</u> *la retta tangente non fosse altro che una particolare secante*

Era la retta secante in cui i punti T e R coincidevano (h=0) , ma come ogni secante doveva avere il suo triangolo rettangolo in cui il coefficiente angolare m fosse il rapporto tra il cateto verticale e quello orizzontale.
Questi cateti non potevano avere natura di numeri reali perché non vi era distanza tra T ed R.

Quel triangolo doveva essere formato da segmenti infinitesimi , conosciuti e molto discussi dagli antichi greci (Zenone di Elea in particolare).

Chiamai *dx e dy* rispettivamente le lunghezze (infinitesimali) del cateto orizzontale e verticale.



Come per le altre secanti , il coefficiente angolare era $m=\dfrac{dy}{dx}$

Ora il Metodo mi era chiaro e consisteva dei seguenti atti :

data l'equazione della curva $y=f(x)$ e il punto $T(x_0, f(x_0))$

si sostituisce ad x la quantità x_0+dx e ad y la quantità y_0+dy nell'equazione della curva e

successivamente si svolgono i calcoli con l'obbiettivo di determinare il rapporto $\frac{dy}{dx}$

Nei calcoli si eliminano tutte le parti in cui dx e dy compaiono al grado superiore a partire dal secondo. E' una proprietà (molto utile!) dei numeri infinitesimi ; peccato che non valga per i numeri reali.

Ad esempio il termine $(3+dx)^2$ si sviluppa nell'espressione $9+6\mathrm{dx}+dx^2$ per diventare $9+6\mathrm{dx}$ perché posso eliminare dx^2 .

Allo stesso modo l'espressione `(3+dx)(5+2dy)` si trasforma in

$15+6\mathrm{dy}+5\mathrm{dx}$ perché il termine $2\mathrm{dxdy}$ viene eliminato essendo di grado 2 .

N. “tutte cose mirabili ma la quinta C vuole vedere degli esempi ! “

L “certamente Illustrissimo . Nel primo esempio calcolerò la derivata della funzione $y=3\mathrm{x}^2$

Fatte le sostituzioni abbiamo $y+dy=3(x+dx)^2$

$$y+dy=3x^2+6\mathrm{x}\,dx+3(dx)^2$$

$$y+dy=3x^2+6\mathrm{x}\,dx \qquad \textit{il termine } 3(dx)^2 \textit{ è stato eliminato}$$

$$(y-3\mathrm{x}^2)+dy=6\mathrm{x}\,dx \qquad \textit{per l'equazione della funzione } y-3\mathrm{x}^2=0$$

$$dy=6x\,dx$$

$$\frac{dy}{dx}=6\mathrm{x}$$

La derivata prima è dunque $y'=6\mathrm{x}$

Nel secondo esempio calcolerò l'equazione della retta tangente al polinomio $y=4\mathrm{x}^3-7\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}+4$ nel punto di ascissa 1.

Chiamo T il punto di tangenza e calcolo l'ordinata sostituendo ad x il valore 1. $T(1,4)$

Eseguo la sostituzione $1+dx\rightarrow x$ $4+dy\rightarrow y$ nel polinomio

Sviluppo i calcoli $4+dy=4(1+3\mathrm{dx}+3\mathrm{dx}^2+dx^3)-7(1+2\mathrm{dx}+dx^2)+3+3\mathrm{dx}+4$

Elimino le quantità superiori al 1° grado e semplifico

$$4+dy=4(1+3\mathrm{dx})-7(1+2\mathrm{dx})+3+3\mathrm{dx}+4$$

$$4+dy=4+12\,dx-7-14\,dx+3+3\,dx+4$$

$$dy=dx$$

$$m=\frac{dy}{dx}=1$$

Trovato il coefficiente angolare m l'equazione della tangente sarà $y-4=x-1$

Esempio 2 Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva razionale fratta $y=\frac{8x^2+5x}{3x^2-x+5}$ nel punto di ascissa 1.

Chiamo T il punto di tangenza e calcolo l'ordinata sostituendo ad x il valore 1. $T\left(1,\frac{13}{7}\right)$

Eseguo la sostituzione $1+dx\rightarrow x$ $\frac{13}{7}+dy\rightarrow y$

Sviluppo i calcoli e semplifico

$$\frac{13}{7}+dy=\frac{8(1+dx)^2+5(1+dx)}{3(1+dx)^2-(1+dx)+5}$$

$$\frac{13}{7}+dy=\frac{8+16\mathrm{dx}+8\mathrm{dx}^2+5+5\mathrm{dx}}{3+6\mathrm{dx}+3\mathrm{dx}^2-1-dx+5}=\frac{21\,dx+13}{5\mathrm{dx}+7}$$

$$\frac{13}{7}+dy=\frac{21\,dx+13}{5\mathrm{dx}+7} \qquad \textit{pongo tutto a denominatore comune}$$

$$\frac{13(5\mathrm{dx}+7)+7(5\mathrm{dx}+7)dy=7(21\,dx+13)}{7(5\mathrm{dx}+7)}$$

eseguo i calcoli e elimino il termine $35\,dx\,dy$ *perché di* $2°$ *grado*

$$65\,dx+91+49\,dy=147\,dx+91$$

$$49\,dy=82\,dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{82}{49}$$

Trovato il coefficiente angolare m l'equazione della tangente sarà

$$y-\frac{13}{7}=\frac{82}{49}(x-1)$$

che con qualche passaggio algebrico diviene $y=\frac{82}{49}x+\frac{9}{49}$

L. e N . *(insieme)* “ abbiamo finito ragazzi . Grazie per averci dato la possibilità di ricordare i bei tempi della filosofia naturale .

Isaac Newton Gottfried Leibniz

La critica al Calcolo (INTERVALLO)

“Mi chiamo George Berkeley e nel 1734 ho pubblicato un libro *The analist* in cui mi rivolgo ad un matematico e dimostro che il Calcolo , anche se funziona , è basato su ipotesi assurde. Tutti partono dal rapporto incrementale ma poi la quantità h viene posta uguale a zero !
Le divisioni per zero non sono possibili! E allora come la mettiamo signori Newton e Leibniz? “

In Inghilterra le critiche di Berkeley rallentarono lo sviluppo della teoria mentre nel continente le critiche ai fondamenti furono considerate marginalmente e si applicò la nuova analisi in particolare alla fisica , ottenendo risultati strepitosi.

Il Calcolo secondo Cauchy – Weierstrass (ATTO SECONDO)

Weierstrass e Cauchy : “La critica ai fondamenti del Calcolo di Berkeley era legata agli infinitesimi. Come era possibile salvare le meravigliose tecniche matematiche ed essere sicuri dei risultati ottenuti attraverso queste ? Bisognava ridefinire , senza gli infinitesimi, il calcolo della derivata .
Trovammo la risposta rimanendo nell'insieme dei numeri reali , scoprendo un'operazione fondamentale in R : IL LIMITE.
Essa permette di studiare l'andamento di una funzione nell'intorno di un suo punto , anzi addirittura nell'intorno di un punto di frontiera del dominio.
Applicando l'operazione di limite al rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ridefinimmo l'operazione di derivazione e tutto fu salvo !

C: “Signor Weierstrass illustri brevemente a questi ragazzi il suo metodo $\epsilon\,\delta$ con cui ha legittimato l'operazione di limite

W. “ Quando scrivo $\lim_{x \to a} f(x)=b$ intendo dire che

per ogni $\epsilon > 0$ piccolo a piacere **esiste un** δ **tale che** quando $|x-a| < \delta$

allora $|f(x)-b| < \epsilon$

L'idea è difficile da capire ma la sua rigorosità ci salverà per sempre da Berkeley . “

La rivincita di Leibniz (GRAN FINALE ?)

Abraham Robinson “ Ho studiato logica matematica e attraverso essa sono riuscito ad ottenere negli anni 50/60 del secolo scorso questo risultato matematicamente ineccepibile:

ESISTE UN INSIEME NUMERICO R* CHE CONTIENE I NUMERI REALI R E ALTRI NUMERI .

Questi altri numeri hanno le medesime proprietà degli infinitesimi di Leibniz, per cui li indicai con dx , dy ecc..
Ho chiamato i numeri di R* iperreali e si scrivono come somma di un numero reale e di un infinitesimo.
Dato un numero iperreale x* = x + dy indico con st (x*) (leggi parte standard di x*)
la parte reale del numero.

st (2+3dx) = 2

Su R* ,insieme “non standard “ , ho ricostruito tutta l'analisi matematica .

Il mio metodo per calcolare la derivata è analogo a quello di Leibniz e differisce solo alla fine dove io chiamo derivata la parte standard del rapporto incrementale sui numeri iperreali

funzione $y=f(x)$ *derivata prima* $y'=st\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)$

fine