ONDE

ESERCIZI SVOLTI DAL PROF. TRIVIA GIANLUIGI

1. Tipi di Onde

Exercise 1. Un'onda viaggia lungo una corda tesa. La distanza verticale dalla cresta al ventre è di $13\,cm$ e la distanza orizzontale dalla cresta al ventre è $28\,cm$. Calcola la lunghezza d'onda e l'ampiezza.

Soluzione: La lunghezza d'onda è la distanza, misurata in orizzontale, tra due creste o tra due ventri. La distanza tra cresta e ventre è pertanto metà lunghezza d'onda; per cui $\lambda = 56\,cm$. L'ampiezza è invece la metà distanza in verticale tra la cresta e il ventre dell'onda, per cui $A = 6,5\,cm$.

2. Velocità di un'onda in moto

Exercise 2. Un surfista che fluttua al di là dei frangiflutti nota che passano per la sua posizione 14 onde al minuto. Se la lunghezza d'onda di queste onde è $34\,m$, trovare la loro velocità di propagazione.

Soluzione: Il surfista osserva la grandezza detta frequenza, cioè il numero di oscillazioni complete in un intervallo di tempo definito. In questo caso, se vogliamo determinare la frequenza in Herz, cioè stabilendo come unità di tempo il secondo, si avrà

$$f = \frac{14}{60} = 0.23\,Hz$$

La velocità di un'onda è data dal rapporto tra la lunghezza d'onda (distanza percorsa nella propagazione) e il tempo impiegato, periodo che è l'inverso della frequenza; pertanto

$$v = \lambda f = 34\,m \times 0.23\,s^{-1} = 7,8\,\frac{m}{s}$$

Exercise 3. La velocità delle onde di superficie nell'acqua diminuisce con il diminuire della profondità. Supponiamo che delle onde viaggino lungo la superficie di un lago con una velocità di $2.0\,m/s$ e una lunghezza d'onda di $1.5\,m$. Quando queste onde si muovono verso la parte del lago meno profonda la loro velocità diminuisce fino a $1.6\,m/s$, sebbene la loro frequenza rimanga la stessa. Calcolare la lunghezza d'onda nell'acqua bassa.

Soluzione: Nota la relazione $v = \lambda f$, se la frequenza rimane costante, allora velocità e lunghezza d'onda risultano direttamente proporzionali. Pertanto

$$\frac{v_{alta}}{\lambda_{alta}} = \frac{v_{bassa}}{\lambda_{bassa}}$$

da cui

$$\lambda_{bassa} = \frac{v_{bassa}}{v_{alta}}\lambda_{alta} = \frac{4.6}{2.0} \cdot 1.5 = 1.2\,m$$

Exercise 4. Un'onda di frequenza $4.5\,Hz$ con un'ampiezza di $12\,cm$ e una lunghezza d'onda di $27\,cm$ viaggia lungo una corda tesa. Calcolare lo spazio percorso da una cresta della corda in un intervallo di tempo $0.50\,s$.

Soluzione: La frequenza indica quante onde complete si propagano in un secondo. In mezzo secondo si avranno, quindi, 2.25 oscillazioni complete. Pertanto la cresta percorre una distanza

$$\Delta s = 2.25\,s^{-1} \cdot 0.27\,m = 0.61\,m$$

Exercise 5. La velocità di un'onda di lunghezza d'onda λ, che si propaga in acque profonde, è approssimativamente $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$. Calcolare la velocità e la frequenza di un'onda che si propaga in acque profonde con una lunghezza d'onda di $4.5\,m$.

Soluzione: Applicando la relazione che descrive la velocità, si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{9.8\,\frac{m}{s^2} \times 4.5\,m}{2\pi}} = 2.65\,\frac{m}{s}$$

Note velocità e lunghezza d'onda è possibile calcolare la frequenza

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{0.27\,\frac{m}{s}}{0.045\,m} = 0.59\,Hz$$

Exercise 6. Le onde su una particolare corda viaggiano con una velocità di $16\,m/s$. Di quale fattore dovrebbe essere cambiata la tensione nella corda per produrre onde con velocità doppia?

Soluzione: Il legame che esprime la velocità di un'onda su di una corda in funzione della tensione alla quale è sottoposta è

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

dove μ è la densità lineare, cioè come la massa è distribuita mediamente lungo la corda (intesa avente una sola dimensione). Affinché la velocità raddoppi è necessario, quindi, che la tensione quadruplichi (essendo sotto la radice quadrata).

Exercise 7. Un bambino e sua sorella cercano di comunicare attraverso una cordicella legata tra due lattine. Se la corda è lunga $9.5\,m$, ha una massa di $32\,g$ ed è tesa con una tensione di $8.6\,N$, trovare il tempo impiegato da un'onda per viaggiare da un estremo all'altro.

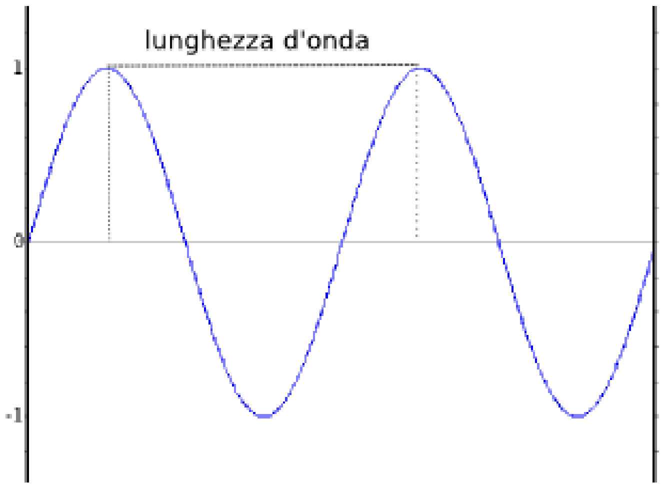
Soluzione: La velocità di propagazione è supposta costante e quindi il tempo impiegato, dalle leggi della cinematica, è espresso da

$$t = \frac{l}{v} = \frac{l}{\sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

Possiamo calcolare $\mu = \frac{massa}{lunghezza} = \frac{0.032\,kg}{9.5\,m} = 3.4 \cdot 10^{-3}\,\frac{kg}{m}$, pertanto

$$t = \frac{9.5\,m}{\sqrt{\frac{8.6\,N}{3.4 \cdot 10^{-3}\,\frac{kg}{m}}}} = 0,18\,s$$

Exercise 8. Un'onda ha una velocità di $240\,m/s$ e una lunghezza d'onda di $3.2\,m$. Determinare la frequenza e il periodo dell'onda.



Soluzione: La velocità di una perturbazione che si propaga come un'onda, è espressa da

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

dove λ è la lunghezza d'onda e T il periodo, cioè l'intervallo di tempo per un'oscillazione completa. Essendo però

$$T = \frac{1}{f}$$

dove f è la frequenza, cioè il numero di oscillazioni complete in un tempo fissato (se il tempo è di $1\,s$, la frequenza si misura in Hertz), la velocità si può esprimere come

$$v = \lambda f$$

Conoscendo la velocità è la lunghezza d'onda, possiamo calcolare il periodo e la frequenza:

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{3.2\,m}{240\,\frac{m}{s}} = 0.013\,s$$

da cui

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.013\,s} = 75\,Hz$$

Exercise 9. Un'onda ha una pulsazione di $110\,rad/s$ e una lunghezza d'onda di $1.80\,m$. Calcolare il numero d'onda angolare e la velocità dell'onda.

Soluzione: La pulsazione di un'onda sinusoidale rappresenta la frequenza angolare, cioè il numero di radianti spazzati nell'unità di tempo (nel nostro caso il secondo). È definita come $\omega = \frac{2\pi}{T}$, mentre il numero d'onda angolare è definito come $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Pertanto,

$$k = \frac{2\pi}{1.80\,m} = 3.49\,m^{-1}$$

e la velocità è data da

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{110\,\frac{rad}{s}}{3.49\,\frac{1}{m}} = 31.5\,\frac{m}{s}$$

Exercise 10. La velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto è di $3.0 \cdot 10^8\,m/s$. Le lunghezze d'onda delle onde del visibile vanno da circa $400\,nm$ nel violetto fino a circa $700\,nm$ nel rosso. a)Trovare il corrispettivo intervallo nelle frequenze. L'intervallo per le frequenze radio in onde corte (la radio FM e la televisione in VHS) va da 1.5 a $300\,MHz$. b) Trovare il corrispettivo intervallo per le lunghezze d'onda. Anche i raggi X sono onde elettromagnetiche. L'intervallo per le loro lunghezze d'onda si estende da circa $5.0\,nm$ fino a circa $1.0 \cdot 10^{-2}\,nm$. c)Trovare il corrispettivo intervallo tra le frequenze.

Soluzione: Tutte le domande si riferiscono alla relazione esistente tra lunghezza d'onda, frequenza e velocità di propagazione di un'onda:

$$v = \lambda f$$

Caso a) Nota la velocità di propagazione e la lunghezza d'onda, risolviamo rispetto alla frequenza

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{v}{\lambda_1} = \frac{3.0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{4.0 \cdot 10^{-7}\,m} = 7.5 \cdot 10^{14}\,Hz \\ f_2 &= \frac{v}{\lambda_2} = \frac{3.0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{7.0 \cdot 10^{-7}\,m} = 4.3 \cdot 10^{14}\,Hz \end{aligned}$$

Caso b) questa volta è nota la frequenza, per cui

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{v}{f_1} = \frac{3.0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{1.5 \cdot 10^6\,s^{-1}} = 200\,m \\ \lambda_2 &= \frac{v}{f_2} = \frac{3.0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{3.0 \cdot 10^8\,m} = 1.0\,m \end{aligned}$$

Caso c) per i raggi X è nota la lunghezza d'onda, per cui

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{v}{\lambda_1} = \frac{3.0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{5.0 \cdot 10^{-9}\,m} = 6.0 \cdot 10^{16}\,Hz \\ f_2 &= \frac{v}{\lambda_2} = \frac{3.0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{1.0 \cdot 10^{-11}\,m} = 3.0 \cdot 10^{19}\,Hz \end{aligned}$$

Nota: L'esercizio è abbastanza ripetitivo, ma ha il pregio di fissare gli ordini di grandezza di fenomeni con i quali abbiamo continuamente a che fare nell'esperienza quotidiana (a parte i raggi X).

Exercise 11. Un'onda sinusoidale si muove lungo una corda. Il tempo impiegato in un certo punto per oscillare dallo spostamento massimo a zero è di $0.170\,s$. Trovare a) il periodo, b) la frequenza. La lunghezza d'onda è di $1.40\,m$; c) trovare la velocità dell'onda.

Soluzione: Il tempo di oscillazione dal massimo a zero equivale a un quarto di periodo, per cui caso a) $T = 0.170 \cdot 4 = 0.680\,s$. Caso b): la frequenza è

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.680\,s} = 1.47\,Hz$$

Caso c) la velocità è

$$v = \lambda f = 1.40\,m \times 1.47\,s^{-1} = 2.06\,\frac{m}{s}$$

Exercise 12. Scrivere l'equazione di un'onda in moto lungo la direzione negativa dell'asse X e avente un'ampiezza di $0.010\,m$, una frequenza di $550\,Hz$ e una velocità di $330\,m/s$.

Soluzione: Questo esercizio chiede solo di saper riconoscere le grandezze che compaiono nell'equazione generale di un'onda sinusoidale dipendente dalla posizione e dal tempo:

$$y\,(x,t) = A\sin\left(kx - \omega t\right)$$

dove A è l'ampiezza dell'onda, ω è la pulsazione e k il numero d'onda angolare (ovviamente, x e t rappresentano la posizione e il tempo). Basta ricordare che $\omega = \frac{2\pi}{T}$, dove T è il periodo, e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Nel nostro caso $A = 0.010$; per trovare ω ricordiamo che

$$f = \frac{1}{T} \quad \textit{per cui} \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \times 550$$

per trovare k dalla velocità, ricordiamo che $v = \lambda f$, e pertanto

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{330}{550} = 0.6$$

da cui

$$k = \frac{2\pi}{0.6}$$

L'equazione sarà quindi

$$y\,(x,t) = 0.010\sin\left(\frac{2\pi}{0.6}x - 2\pi \times 550t\right)$$

e raccogliendo π si ha,

$$y\,(x,t) = 0.010\sin\left[\pi\left(3.33x - 1100t\right)\right]$$

Exercise 13. Scrivere l'equazione che descrive un'onda armonica con un'ampiezza di $0.16\,m$, una lunghezza d'onda di $2.1\,m$ e un periodo di $1.8\,s$. L'onda è trasversale e viaggia verso destra e a $t = 0$ e $x = 0$, ha uno spostamento $y = 0.16\,m$.

Soluzione: L'equazione generale di un'onda del tipo descritto è $y\,(x,t) = A\sin\left(kx - \omega t\right)$ dove A è l'ampiezza, k il numero d'onda, cioè $\frac{2\pi}{\lambda}$, ω la pulsazione, cioè $\frac{2\pi}{T}$. Sostituendo i valori assegnati si ha

$$y\,(x,t) = 0.16\sin\left(\frac{2\pi}{2.1}x - \frac{2\pi}{1.8}t\right)$$

Inoltre, tenendo conto delle condizioni iniziali, l'onda risulta spostata di un valore pari all'ampiezza, per cui è sfasata di 90°. Si ha quindi

$$y\,(x,t) = 0.16\cos\left(2.99x - 3.49t\right)$$

Exercise 14. L'equazione di un'onda trasversale in moto in una corda è data da

$$y = (2.00\,mm)\sin\left[\left(20\,m^{-1}\right)x - \left(600\,s^{-1}\right)t\right]$$

a) trovare l'ampiezza, la frequenza, la velocità e la lunghezza d'onda.

Soluzione: Esercizio con caratteristiche inverse al precedente, dalla formula riconoscere il significato delle grandezze presenti. Confrontando la formula data con quella di un'onda generica

$$y\,(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

è possibile ricavare quanto richiesto. Infatti a) $A = 2.00\,mm$;

$$600\,s^{-1} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

da cui

$$f = \frac{600}{2\pi} = 95.5\,Hz$$

la velocità

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{600}{20} = 30\,\frac{m}{s}$$

e la lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{30}{95.5} = 0.31\,m$$

Exercise 15. Scrivere l'equazione di un'onda trasversale sinusoidale in moto su una corda lungo la direzione $+y$ con un numero d'onda $60\,cm^{-1}$, un periodo di $0.20\,s$ e un'ampiezza di $3.0\,mm$. Assumere z come direzione trasversale.

Soluzione: L'equazione generale di una tale onda è

$$z\left(y,t\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}y - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

nel nostro caso $A = 3.0 \cdot 10^{-3}\,m$, $\frac{1}{\lambda} = 0.60\,m^{-1}$ e $T = 0.20\,s$; pertanto

$$z = 3.0 \cdot 10^{-3}\sin\left(3.77y - 31.4t\right)$$

Exercise 16. La corda più pesante e quella più leggera in un violino hanno le densità lineari pari a $3.0\,g/m$ e $0.29\,g/m$. Trovare il rapporto tra il diametro della corda più pesante e quella più leggera, supponendo che siano costituite dallo stesso materiale.

Soluzione: La densità lineare è la massa della corda divisa per la sua lunghezza. L'onda può viaggiare lungo una corda se questa risulta prima tesa. La corda tesa può essere pensata come un cilindro di volume $\pi R^2 l$, dove R è il raggio della corda e l la sua lunghezza. Essendo costituite dallo stesso materiale, le due corde avranno la stessa densità, cioè

$$d = \frac{M_1}{V_1} = \frac{M_2}{V_2}$$

ora la massa può essere espressa tramite la densità lineare come $M = \mu l$, e sostituendo, si ha

$$d = \frac{\mu_1 l}{\pi R_1^2 l} = \frac{\mu_2 l}{\pi R_2^2 l}$$

Il rapporto tra i due raggi sarà pertanto

$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{3.0}{0.29}} = 3.2$$

Exercise 17. La velocità di un'onda su una corda è $170\,m/s$ quando la tensione è $120\,N$. A quale valore deve essere aumentata la tensione affinché l'onda raggiunga una velocità di $180\,m/s$?

Soluzione: Un'onda trasversale può viaggiare lungo una corda se questa è tesa, mediante l'azione di una forza. al variare della tensione cambia il modo di vibrazione della corda e quindi la velocità con cui l'onda si propaga. La relazione è data da

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

dove τ è la tensione e μ è la densità lineare della corda. Nel nostro caso la densità è sempre la stessa, per cui

$$\mu = \frac{\tau}{v^2}$$

confrontando i due casi, si ha

$$\frac{\tau_1}{v_1^2} = \frac{\tau_2}{v_2^2}$$

sostituendo i valori numerici

$$\tau_2 = 120\frac{180^2}{170^2} = 135\,N$$

Exercise 18. Due corde d'acciaio di una chitarra hanno la stessa lunghezza. La corda A ha un diametro di $0,50\,mm$ ed è soggetta a una tensione di $410.0\,N$. La corda B ha un diametro di $1.0\,mm$ ed è sottoposta a una tensione di $820\,N$. Determina il rapporto tra le velocità delle onde in queste due corde.

Soluzione: Le corde hanno la stessa lunghezza ma diverso diametro, e sono dello stesso materiale, l'acciaio. Pertanto, la densità di entrambe ($d = \frac{m}{V}$) sarà la stessa. Avendo però diversa sezione, avranno una diversa densità lineare ($\mu = dA_{base}$) per cui

$$\begin{aligned} v_A &= \sqrt{\frac{T_A}{\mu_A}} = \sqrt{\frac{T_A}{dA_A}} = \sqrt{\frac{T_A}{d\pi r_A^2}} \\ v_B &= \sqrt{\frac{T_B}{\mu_B}} = \sqrt{\frac{T_B}{dA_B}} = \sqrt{\frac{T_B}{d\pi r_B^2}} \end{aligned}$$

il rapporto tra le due velocità sarà

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\sqrt{\frac{T_A}{d\pi r_A^2}}}{\sqrt{\frac{T_B}{d\pi r_B^2}}} = \sqrt{\frac{T_A}{T_B} \cdot \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2} = \sqrt{\frac{410.0}{820.0} \cdot \left(\frac{0.5\,mm}{0.25\,mm}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \times 4} = 1.4$$

Exercise 19. L'equazione di un'onda trasversale in una corda è

$$y = (2.0\,mm) \sin\left[\left(20\,m^{-1}\right)x - \left(600\,s^{-1}\right)t\right]$$

La tensione della corda è di $15\,N$. Trovare la velocità dell'onda e la densità lineare della corda in grammi al metro.

Soluzione: Dall'equazione dell'onda otteniamo che l'ampiezza $A = 2.00\,mm$;

$$600\,s^{-1} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

da cui

$$f = \frac{600}{2\pi} = 95.5\,Hz$$

la velocità

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{600}{20} = 30\,\frac{m}{s}$$

Dalla relazione

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

otteniamo che

$$\mu = \frac{\tau}{v^2} = \frac{15\,kg\frac{m}{s^2}}{900\,\frac{m^2}{s^2}} = 1.7 \cdot 10^{-2}\,\frac{kg}{m} = 17\,\frac{g}{m}$$

Exercise 20. La densità lineare di una corda vibrante è $1.6 \cdot 10^{-4}\,kg/m$. Un'onda trasversale che viaggia lungo la corda è descritta dalla equazione $y = (0.021\,m)\sin\left[\left(2.0\,m^{-1}\right)x + \left(30\,s^{-1}\right)t\right]$. Trovare la velocità dell'onda e la tensione della corda.

Soluzione: La velocità è data da

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{30}{2.0} = 15\,\frac{m}{s}$$

Da ciò è possibile ottenere la tensione della corda

$$\tau = \mu v^2 = 1.6 \cdot 10^{-4}\,\frac{kg}{m} \cdot 15^2\,\frac{m^2}{s^2} = 0.036\,N$$

Exercise 21. Trovare l'onda trasversale più veloce che può essere inviata lungo un cavo di acciaio, considerando che la tensione elastica massima alla quale l'acciaio può resistere è $7.0 \cdot 10^8\,N/m^2$e la densità dell'acciaio è $7800\,kg/m^3$.

Soluzione: la velocità di un'onda è data da

$$v = \sqrt{\frac{\frac{\tau}{Area}}{\frac{\mu}{Area}}} = \sqrt{\frac{7.0 \cdot 10^8\,\frac{N}{m^2}}{7800\,\frac{kg}{m^3}}} = 300\,\frac{m}{s}$$

Exercise 22. Una corda tesa ha una massa per unità di lunghezza di $5.0\,g/cm$ e una tensione di $10\,N$. Un'onda sinusoidale su questa corda ha un'ampiezza di $0.12\,mm$ e una frequenza di $100\,Hz$ ed è in moto nel verso in cui x diminuisce. Scrivere l'equazione di quest'onda.

Soluzione: Ricaviamo dalle grandezze assegnate i parametri per scrivere la funzione d'onda. Innanzitutto $A = 0.12\,mm$, $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 100\,s^{-1} = 628\,s^{-1}$; per determinare k è necessario conoscere la velocità di propagazione

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{10\,N}{5.0 \cdot 10^{-1}\,\frac{kg}{m}}} = 4.5\,\frac{m}{s}$$

pertanto,

$$k = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \times 100}{4.5} = 140\,m^{-1}$$

la funzione d'onda è quindi

$$y = (0.12\,mm)\sin\left[\left(140\,m^{-1}\right)x + \left(628\,s^{-1}\right)t\right]$$

Exercise 23. Una corda sottoposta a una tensione τ_1 oscilla nella terza armonica alla frequenza ν_3 e le onde nella corda hanno una lunghezza d'onda λ_3. Se si aumenta la tensione da $\tau_f = 4\tau_1$ e si fa di nuovo oscillare la corda nella terza armonica, trovare la frequenza di oscillazione in funzione di ν_3 e la lunghezza d'onda delle onde in funzione di λ_3.

Soluzione: Si tratta in questo caso di onde stazionarie, per le quali le posizioni dei massimi e minimi non varia. Esse si generano quando due onde sinusoidali di stessa ampiezza e lunghezza d'onda si muovono in versi opposti lungo una corda. Il legame tra frequenza e tensione va come la radice quadrata, per cui se la tensione quadruplica, la frequenza raddoppia. La lunghezza d'onda rimarrà invece la stessa.

Exercise 24. Una corda di chitarra in nylon ha una densità lineare di $7.2\,g/m$ ed è sottoposta ad una tensione di $150\,N$. I supporti fissi distano $90\,cm$. La corda oscilla secondo lo schema in figura. Calcolarne la velocità, la lunghezza d'onda, la frequenza delle onde la cui sovrapposizione determina quest'onda stazionaria.

Soluzione: La velocità è data da

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{150\,N}{7.2 \cdot 10^{-3}\,\frac{kg}{m}}} = 144\,\frac{m}{s}$$

La lunghezza d'onda per una corda con un'oscillazione e mezza ($n = 3$) è data da

$$\lambda = \frac{2L}{3} = \frac{2 \times 0.90\,m}{3} = 0.6\,m$$

la frequenza di queste onde stazionarie è

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L}n = \frac{144\,\frac{m}{s} \times 3}{1.80\,m} = 240\,Hz$$

Exercise 25. La nota più bassa in un pianoforte è un La, quattro ottave al sotto del La di frequenza $440\,Hz$. La nota più alta è un Do, quattro ottave al di sopra del Do centrale ($261.7\,Hz$). Trovare frequenze e lunghezze d'onda di queste note.

Soluzione: In un pianoforte la frequenza di un suono è legato alla lunghezza della corda percossa dal martelletto. Più la corda è lunga e più il suono è basso. La relazione che descrive tali onde stazionarie è

$$f = \frac{v}{2L}$$

Il La più basso avrà una frequenza

$$\frac{f_{La_{basso}}}{f_{La}} = \frac{\frac{v}{16L}}{\frac{v}{2L}} = \frac{1}{8}$$

per cui

$$f_{La_{basso}} = \frac{440}{4} = 27.5\,Hz$$

La frequenza del Do più alto

$$f_{Do_{alto}} = 16 f_{Do} = 4187\,Hz$$

Le lunghezze d'onda saranno

$$\lambda_{La_{basso}} = \frac{343}{27.5} = 12.5\,m$$
$$\lambda_{Do_{alto}} = \frac{343}{4187} = 8.2\,cm$$

Exercise 26. Quando una corda di violino viene suonata in un certo modo, la frequenza di risonanza più bassa corrisponde al LA centrale ($440\,Hz$). Trovare la frequenza della seconda e della terza armonica di tale corda.

Soluzione: la frequenza $440\,Hz$ corrispondente alla prima armonica consente di determinare la velocità di propagazione di questa onda stazionaria

$$v = \frac{2Lf}{n(=1)} = 880L$$

la seconda armonica avrà

$$f_2 = \frac{v}{2L}n = \frac{880L}{2L} \times 2 = 880\,Hz$$

per la terza armonica

$$f_3 = \frac{v}{2L}n = \frac{880L}{2L} \times 3 = 1320\,Hz$$

Exercise 27. Una corda fissata ad entrambe le estremità è lunga $8.40\,m$ e ha una massa di $0.120\,kg$. Essa è sottoposta a una tensione di $96.0\,N$ e viene fatta oscillare. Trovare (a) la velocità delle onde sulla corda; (b) la massima lunghezza d'onda per un'onda stazionaria; (c) la frequenza di questa onda.

Soluzione: la densità lineare della corda è data da

$$\mu = \frac{M}{L} = \frac{0.120\,kg}{8.40\,m} = 0.014\,\frac{kg}{m}$$

la velocità delle onde è

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{96.0\,N}{0.014\,\frac{kg}{m}}} = 82.0\,\frac{m}{s}$$

la lunghezza d'onda massima corrisponde ad una semi oscillazione nell'intera lunghezza della corda, cioè $\lambda_{max} = 2 \times 8.40\,m = 16.80\,m$ e la frequenza è

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{82.0\,\frac{m}{s}}{16.80\,m} = 4.88\,Hz$$

Exercise 28. Una corda lunga $120\,cm$ è tesa tra due supporti fissi. Trovare le tre lunghezze d'onda massime per onde stazionarie su questa corda.

Soluzione: le lunghezze d'onda delle onde stazionarie in una corda fissa sono date da

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

per cui

$$\lambda_1 = 2L(n=1) = 2.40\,m$$
$$\lambda_2 = \frac{2L}{n}(n=2) = 1.20\,m$$
$$\lambda_3 = \frac{2L}{n}(n=3) = 0.80\,m$$

Exercise 29. Una corda lunga $125\,cm$ ha una massa di $2.00\,g$. Essa è tesa con una tensione di $7.00\,N$ tra due supporti fissi. Trovare la velocità dell'onda e la frequenza di risonanza più bassa.

Soluzione: Per ottenere la velocità di un'onda stazionaria è necessario conoscere prima la densità lineare della corda, cioè

$$\mu = \frac{M}{L} = \frac{2.00\,g}{125\,cm} = 0.016\,\frac{g}{cm} = 1.6 \cdot 10^{-3}\,\frac{kg}{m}$$

pertanto

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{7.00\,N}{1.6 \cdot 10^{-3}\,\frac{kg}{m}}} = 66.1\,\frac{m}{s}$$

la frequenza di risonanza per $n = 1$ è

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{66\,\frac{m}{s}}{2.50\,m} = 26.4\,Hz$$

Exercise 30. Un cavo lungo $1.50\,m$ ha una massa di $8.70\,g$ ed è sottoposto a una tensione di $120\,N$. Il cavo è teso rigidamente a entrambe le estremità e viene fatto vibrare. Calcolare a) la velocità delle onde sul cavo; b) le lunghezze d'onda delle onde che producono onde stazionarie sulla corda con uno e due occhielli; c) le frequenze delle onde che producono onde stazionarie con uno o due occhielli.

Soluzione: la densità lineare è data dal rapporto tra la massa e la lunghezza del cavo

$$\mu = \frac{M}{L} = \frac{8.70 \cdot 10^{-3}\,kg}{1.50\,m} = 0.0058\,\frac{kg}{m}$$

a) la velocità di propagazione è espressa da

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{120\,N}{0.0058\,\frac{kg}{m}}} = 144\,\frac{m}{s}$$

b) le lunghezze d'onda sono espresse da

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

per cui, con un occhiello

$$\lambda = \frac{2L}{1} = 3.00\,m$$

con due occhielli

$$\lambda = \frac{2L}{2} = 1.50\,m$$

c) le frequenze si possono ricavare anche dalla relazione

$$v = f\lambda$$

risolvendo rispetto a f

$$f_1 = \frac{144\,\frac{m}{s}}{3.00\,m} = 48\,Hz$$

e

$$f_2 = \frac{144\,\frac{m}{s}}{1.50\,m} = 96\,Hz$$

Exercise 31. Siete a un grande concerto all'aperto, seduti a $300\,m$ dal sistema di altoparlanti. Il concerto è trasmesso anche dal vivo via satellite. Immaginiamo un radioascoltatore posto a $5000\,km$ di distanza. Chi sente per primo la musica, voi o il radioascoltatore, e con quale intervallo di tempo di differenza?

Soluzione:: Per risolvere questo esercizio serve ricordare che il segnale trasmesso via satellite si sposta alla velocità della luce, mentre il suono nell'aria ha una velocità di propagazione di $343\,m/s$. Il tempo necessario affinché l'ascoltatore dal vivo riceva il suono, supponendo che il segnale venga raccolto dall'impianto, è

$$t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{300\,m}{343\,\frac{m}{s}} = 0.87\,s$$

L'analogo tempo per il radioascoltatore è

$$t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{5000\,km}{3.0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}} = \frac{5.0 \cdot 10^6\,m}{3.0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}} = 0.017\,s$$

Come si può osservare, il radioascoltatore riceverà prima il suono

$$\Delta t = 0.87 - 0.017 = 0.853\,s$$

Exercise 32. Una corda è tesa tra due supporti fissi separati da una distanza di $75.0\,cm$. Si sono osservate le frequenze di $420\,Hz$ e di $315\,Hz$, e nessun'altra frequenza di risonanza tra queste due. Trovare le frequenza di risonanza più bassa per questa corda e la velocità dell'onda.

Soluzione: Entrambi i valori della frequenza, se scomposti, sono multipli di 105, in particolare,

$$420 = 105 \times 4 \qquad 315 = 105 \times 3$$

pertanto quando $n = 1$ si ha la frequenza più bassa pari a $105\,Hz$. La velocità dell'onda si ottiene da

$$v = \frac{2fL}{n} = 105 \times 1.5 = 158\,\frac{m}{s}$$

Exercise 33. Due onde si propagano su una stessa corda molto lunga. Un generatore all'estremità sinistra della corda crea un'onda data da

$$y = (6.0\,cm) \cos \frac{\pi}{2} \left[\left(2.0\,m^{-1}\right) x + \left(8.0\,s^{-1}\right) t \right]$$

e uno all'estremità destra genera l'onda

$$y = (6.0\,cm) \cos \frac{\pi}{2} \left[\left(2.0\,m^{-1}\right) x - \left(8.0\,s^{-1}\right) t \right]$$

Calcolare a) la frequenza, la lunghezza d'onda e la velocità di ogni onda; b) trovare i punti nei quali non si ha spostamento (nodi) e c) in quali punti il moto della corda è massimo.

Soluzione: le due onde hanno gli stessi parametri, si differenziano solo per il verso del movimento. a) Ricordando che l'equazione generale di un'onda e che $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi\,m^{-1}$ e $\omega = 2\pi f = 4\pi\,s^{-1}$ si può ricavare la frequenza

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2\,Hz \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\,m$$
$$v = \lambda f = 4\,\frac{m}{s}$$

b) Applicando la formula goniometrica $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$ alle due funzioni d'onda, si ottiene un'onda risultante dalla somma delle due, mediante il principio di sovrapposizione, della forma

$$y = (12.0\,cm) \cos \pi x \cos 4\pi t$$

questa funzione è uguale a zero (nodi) quando $\cos \pi x \cos 4\pi t = 0$, cioè $\cos \pi x = 0$ per $\pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e quindi $x = 0.5\,m$, e ricordando che $\lambda = 2\,m$, anche per $x = 1.5\,m$, $2.5\,m$, *ecc*,
c) ricordando il grafico della funzione coseno, la funzione è massima per $x = 0\,m$, $x = 1.0\,m$, $x = 2.0\,m$, ecc.

Exercise 34. Un'onda sinusoidale longitudinale continua viene inviata lungo una molla da una sorgente oscillante attaccata ad essa. La frequenza della sorgente è $25\,Hz$, e la distanza tra i punti successivi di massima espansione nella molla è $24\,cm$. Trovare la velocità dell'onda. Se il massimo spostamento longitudinale di un punto nella molla è $0.30\,cm$ e l'onda si muove nella direzione $-x$, scrivere l'equazione per l'onda. (Supporre che la sorgente sia in $x = 0$ e che lo spostamento in $x = 0$ quando $t = 0$ sia nullo.

Soluzione: la velocità dell'onda è data da $v = \lambda f$, dove $f = 25\,Hz$ e $\lambda = 0.24\,m$.

$$v = 25\,s^{-1} \times 0.24\,m = 6.0\,\frac{m}{s}$$

se l'onda si muove nel verso $-x$, e per le condizioni, la sua equazione sarà

$$y(x,t) = A \sin(kx + \omega t)$$

ma $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0.26\,cm^{-1}$ e $\omega = 2\pi f = 157\,s^{-1}$da cui

$$y(x,t) = 0.30\ (cm) \sin(0.26x + 157t)$$

Exercise 35. Una corda lunga $3.0\,m$ sta oscillando come un'onda stazionaria con tre occhielli, la cui ampiezza è $1.0\,cm$. La velocità dell'onda è $100\,m/s$. Trovare la frequenza e scrivere le equazioni per due onde che, se combinate, risultano in un'onda stazionaria.

Soluzione: possiamo trovare la frequenza considerando $n=3$; per cui

$$f=\frac{v}{2L}n=\frac{100\,\frac{m}{s}}{6.0\,m}\times 3=50\,Hz$$

le due onde che determinano questa onda stazionaria devono avere ampiezza pari alla metà di quella risultante (si sommano infatti in fase); con $n=3$, la lunghezza d'onda è $\lambda=\frac{2L}{3}=2.0\,m$ e quindi $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{2.0}=3.14\,m^{-1}$; inoltre $\omega=2\pi f=2\pi\times 50=314\,s^{-1}$, le due equazioni sono

$$\begin{aligned} y_1 &= \left(5.0\cdot 10^{-3}\,m\right)\sin\left(3.14x+314t\right) \\ y_2 &= \left(5.0\cdot 10^{-3}\,m\right)\sin\left(3.14x-314t\right) \end{aligned}$$

Exercise 36. Due spettatori ad una partita di calcio vedono, e un istante più tardi sentono, la palla che viene colpita sul campo di gioco. Il tempo di ritardo per uno spettatore è $0.23\,s$ e per l'altro $0.12\,s$. Le linee che uniscono ogni spettatore con il calciatore che colpisce la palla si incontrano formando un angolo di $90°$. Determinare la distanza di ogni spettatore dal calciatore e la distanza tra i due spettatori.

Soluzione:: Possiamo considerare le distanze in linea d'aria, poiché la luce e il suono si propagano in linea retta in uno stesso mezzo. Il tempo di ritardo rappresenta la differenza tra il tempo impiegato dalla luce e dal suono a percorrere le stesse distanze, $\Delta t_{suono}-\Delta t_{luce}$. Per calcolare la distanza spettatore-calciatore, basta utilizzare la differenza tra le velocità delle due onde;

$$\Delta t_s=\frac{d}{v_s}\qquad \Delta t_l=\frac{d}{v_l}$$

sottraendo, si ha

$$\Delta t_s-\Delta t_l=\frac{d}{v_s}-\frac{d}{v_l}=\frac{dv_l-dv_s}{v_sv_l}=\frac{d\left(v_l-v_s\right)}{v_sv_l}$$

per lo spettatore più vicino

$$0.12\,s=\frac{d_1\left(3.0\cdot 10^8-343\right)}{3.0\cdot 10^8\cdot 343}$$

da cui

$$d_1=\frac{0.12\cdot 3.0\cdot 10^8\cdot 343}{3.0\cdot 10^8-343}=41.2\,m$$

per l'altro

$$d_1=\frac{0.23\cdot 3.0\cdot 10^8\cdot 343}{3.0\cdot 10^8-343}=78.9\,m$$

Tali distanze sono perpendicolari tra loro, per cui, applicando il th. di Pitagora è possibile ottenere la distanza tra i due spettatori

$$d_{2-1}=\sqrt{41.2^2+78.9^2}=89.0\,m$$

Exercise 37. Nel Parco del Gran Paradiso, un forte grido produce un'eco da una parete in roccia granitica dopo $1.80\,s$. Trovare la distanza della parete.

Soluzione: L'eco dipende dalla riflessione dell'onda sonora quando colpisce la parete. Il tempo trascorso rappresenta l'intervallo di tempo per l'andata e il ritorno dell'onda sonora. Poiché il suono viaggia nell'aria ad una velocità $v_{aria}=343\,m/s$, la distanza sarà, supponendo il moto rettilineo uniforme

$$d=vt=343\,\frac{m}{s}\times 0.90\,s=309\,m$$

Exercise 38. I delfini dell'oceano aperto con gli ultrasuoni con una frequenza di $55kHz$ navigano e individuano le loro prede. Supponiamo che un delfino emetta una serie di suoni che vengono riflessi dal fondo dell'oceano, $75\,m$ più in basso. Trovare il tempo che passa prima che il delfino senta l'eco dei suoni che ha emesso ($v_{acqua}=1530\,m/s$) e la lunghezza d'onda di un tale suono nell'oceano.

Soluzione: Il suono emesso deve percorrere complessivamente $150\,m$ (andata e ritorno). Se il suono si propaga di moto uniforme, il tempo è dato da

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{150\,m}{1530\,\frac{m}{s}} = 0.098\,s$$

La lunghezza d'onda si può derivare da

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1530\,\frac{m}{s}}{55000} = 0.028\,m = 2.8\,cm$$

Exercise 39. La densità media della crosta terrestre $10\,km$ al di sotto dei continenti è $2.7\,g/cm^3$. La velocità delle onde sismiche longitudinali a quella profondità è di $5.4\,km/s$. Trovare il modulo di compressibilità della crosta terrestre a quella profondità (come paragone, quella dell'acciaio è $1.6 \cdot 10^{11}\,Pa$)

Soluzione: il coefficiente di compressibilità descrive la variazione media del volume di un elemento della crosta terrestre al variare della pressione ed è espresso da

$$B = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}$$

dove $\frac{\Delta V}{V}$ è la variazione relativa di volume e Δp la variazione della pressione. Tale coefficiente è legato alla velocità di propagazione di un'onda dalla relazione

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

dove ρ è la densità della materia in kg/m^3. Con i dati disponibili, calcoliamo B,

$$B = v^2\rho = \left(5400\,\frac{m}{s}\right)^2 \times 2700\,\frac{kg}{m^3} = 7.9 \cdot 10^{10}\,Pa$$

Exercise 40. La velocità del suono in un certo metallo è V. Un'estremità di un lungo tubo di quel metallo di lunghezza L viene colpita duramente. Un ascoltatore all'altra estremità sente due suoni, uno dall'onda che ha viaggiato lungo il tubo e l'altro dall'onda che ha viaggiato attraverso l'aria. a) Se v è la velocità del suono nell'aria, trovare l'intervallo di tempo t che trascorre tra l'arrivo dei due suoni; b) supponendo $t = 1.00\,s$ e il tubo in acciaio, trovare la lunghezza L.

Soluzione: a) supponiamo le velocità costanti, per cui il tempo di percorrenza è dato dal rapporto tra la distanza percorsa e la velocità, per cui

$$\Delta t = \frac{L}{v} - \frac{L}{V} = \frac{L\,(V - v)}{vV}$$

b) la velocità del suono nell'acciaio, presa dalla letteratura, è $5941\,m/s$, e quella nell'aria è $331\,m/s$ per cui

$$L = \frac{\Delta t v V}{(V - v)} = \frac{1\,s \times 5491\,\frac{m}{s} \times 331\,\frac{m}{s}}{(5491 - 331)\,\frac{m}{s}} = 352\,m$$

Exercise 41. I pipistrelli sono in grado di emettere ultrasuoni. Supponendo che la più piccola lunghezza d'onda, λ emessa sia pari a $0.32\,cm$, determinare la massima frequenza, f, ultrasonora emessa dall'animale. Assumere come velocità di propagazione $330\,m/s$.

Soluzione:: Nei fenomeni ondulatori, la lunghezza d'onda e la frequenza sono collegati dalla relazione

$$v = \lambda f$$

Conoscendo, pertanto, velocità e lunghezza d'onda, si ha

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{330\,\frac{m}{s}}{0.32 \cdot 10^{-2}\,m} = 1.03 \cdot 10^5\,Hz$$

Exercise 42. Calcolare a che distanza esplode una bomba sapendo che l'intervallo di tempo fra il lampo luminoso e il boato è pari a $5.0\,s$. Assumere come velocità di propagazione del suono, $v = 340\,m/s$.

Soluzione:: È necessario ricordare che la velocità della luce è pari a $c = 3.0 \cdot 10^8\, m/s$. Le due onde, meccanica e luminosa, devono percorrere la stessa distanza, viaggiando però a velocità decisamente diverse. Pertanto

$$t_{suono} - t_{luce} = \frac{d}{v} - \frac{d}{c} = \frac{dc - dv}{vc} = \frac{d\,(c-v)}{vc}$$

inserendo i dati del problema, si ottiene

$$5.0\,s = \frac{d\left(3.0 \cdot 10^8\, \frac{m}{s} - 340\, \frac{m}{s}\right)}{3.0 \cdot 10^8\, \frac{m}{s} \cdot 340\, \frac{m}{s}}$$

da cui

$$d = \frac{5.0\,s \cdot 3.0 \cdot 10^8\, \frac{m}{s} \cdot 340\, \frac{m}{s}}{3.0 \cdot 10^8\, \frac{m}{s} - 340\, \frac{m}{s}} = 1700\, m$$

Exercise 43. Un uomo batte con un martello una rotaia di ferro. Calcolare l'intervallo di tempo che intercorre tra i due colpi percepiti da un'altra persona situata vicino alla rotaia a $680\, m$ dal punto colpito, assumendo come velocità di propagazione del suono nell'aria e nel ferro i valori $340\, m/s$ e $5000\, m/s$.

Soluzione:: La persona distante avvertirà due suoni, uno dovuto alla propagazione nell'aria e l'altro alla propagazione nel metallo. La distanza rimane in questo caso sempre la stessa. Il suono si propaga con moto rettilineo e uniforme e la relazione tra spazio e tempo può essere descritta da $v = s/t$, e risolvendo rispetto a $t = s/v$, si ha

$$t_{aria} = \frac{680\, m}{340\, \frac{m}{s}} = 2\, s \qquad t_{ferro} = \frac{680\, m}{5000\, \frac{m}{s}} = 0.14\, s$$

$$\Delta t \;=\; (2 - 0.14)\ s = 1.86\, s$$

Exercise 44. Un uomo colpisce una lunga barra di alluminio a un'estremità. Un altro uomo, all'altra estremità con l'orecchio vicino alla barra, sente il colpo due volte (una attraverso l'aria, l'altra attraverso la barra), con un intervallo tra i due suoni di $0.120\, s$. Trovare la lunghezza della barra.

Soluzione: la velocità del suono nell'aria è di $343\, m/s$, mentre nell'alluminio è di $6420\, m/s$. Allora,

$$\Delta t = \frac{L}{v_{aria}} - \frac{L}{v_{all}} = L\left(\frac{1}{v_{aria}} - \frac{1}{v_{all}}\right)$$

da cui si ottiene, risolvendo rispetto a L

$$L = \frac{\Delta t}{\left(\frac{1}{v_{aria}} - \frac{1}{v_{all}}\right)} = \frac{0.120\, s}{\left(\frac{1}{343} - \frac{1}{6420}\right)} = 43,5\, m$$

Exercise 45. Una pietra viene fatta cadere in un pozzo. Il suono del tonfo viene sentito dopo $3.00\, s$. Trovare la profondità del pozzo.

Soluzione: Si tratta di valutare il tempo di caduta dovuto al peso del sasso e il tempo di propagazione dell'onda sonora prodotta nell'impatto con il fondo del pozzo. Il sasso in caduta si muove di moto uniformemente accelerato (partenza da fermo) e pertanto impiega

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2s}{9.8}} il$$

suono impiega a risalire il pozzo

$$t_2 = \frac{s}{v_{suono}} = \frac{s}{343}$$

la somma dei due tempi è pari a $3.00\, s$, per cui

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2s}{9.8}} + \frac{s}{343} = 3.00$$

risolvendo rispetto a s, si ha

$$\sqrt{\frac{2s}{9.8}} = 3 - \frac{s}{343}$$

elevando al quadrato e eliminando i denominatori ($mcm = 343^2 \times 9.8$), si ottiene

$$9.8s^2 - 255466s + 10376642 = 0$$

risolvendo l'equazione di secondo grado si ottiene la soluzione accettabile $s = 40.7\, m$.

Exercise 46. L'intervallo di frequenza udibile per l'udito normale va circa da $20\,Hz$ a $20\,KHz$. Trovare le lunghezze d'onda corrispondenti a queste frequenze.

Soluzione: Basta ricordare la relazione che lega le tre grandezze: velocità di propagazione, v, lunghezza d'onda, λ, frequenza, f.

$$v = \lambda f$$

per cui, utilizzando $v_{suono} = 343\,m/s$, si ha

$$\lambda_1 = \frac{343\,\frac{m}{s}}{20\,s^{-1}} = 17,2\,m$$

$$\lambda_2 = \frac{343\,\frac{m}{s}}{20000\,s^{-1}} = 0.017\,m$$

Exercise 47. La lunghezza d'onda più corta emessa da un pipistrello è circa $3.3\,mm$. Trovare la frequenza corrispondente.

Soluzione: ancora

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343\,\frac{m}{s}}{3.3 \cdot 10^{-3}\,m} = 104\,KHz$$

Exercise 48. Gli ultrasuoni diagnostici di frequenza $4.50\,MHz$ sono utilizzati per esaminare i tumori nei tessuti molli. a) Trovare la lunghezza d'onda nell'aria di questa onda acustica; b) se la velocità del suono nel tessuto è di $1500\,m/s$, trovare la relativa lunghezza d'onda.

Soluzione: a) Nell'aria il suono viaggia a $343\,m/s$. Pertanto

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343\,\frac{m}{s}}{4.5 \cdot 10^6 s^{-1}} = 7.62 \cdot 10^{-5}\,m$$

b) nel caso l'onda si propaghi nel tessuto si ha

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1500\,\frac{m}{s}}{4.5 \cdot 10^6 s^{-1}} = 3.33 \cdot 10^{-4}\,m$$

Exercise 49. Un altoparlante conico ha un diametro di $15.0\,cm$. Trovare per quale frequenza la lunghezza d'onda del suono emesso nell'aria è uguale al suo diametro.

Soluzione: si utilizza sempre la relazione

$$v = \lambda f$$

per cui

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343\,\frac{m}{s}}{0.15\,m} = 2287\,Hz$$

Exercise 50. Due onde sonore, emesse nella stessa direzione da due diverse sorgenti con la stessa frequenza, $540\,Hz$, si muovono alla velocità di $330\,m/s$. Le sorgenti sono in fase. Trovare la differenza di fase delle onde in un punto che è a $4.40\,m$ da una sorgente e a $4.00\,m$ dall'altra.

Soluzione: la differenza di fase è data dal rapporto tra la differenza dei due percorsi e la lunghezza d'onda

$$\phi = \frac{2\pi\,(d_2 - d_1)}{\lambda}$$

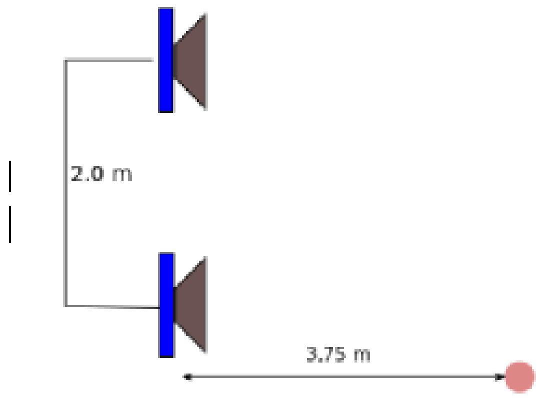
calcoliamo quindi la lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{330\,\frac{m}{s}}{540\,s^{-1}} = 0.61\,m$$

avremo quindi

$$\frac{2\pi\,(4.40 - 4.00)\ m}{0.61\,m} = 4.11\,rad$$

Exercise 51. In figura sono mostrati due altoparlanti separati da una distanza di $2.0\,m$ in fase. Supponiamo che le altezze dei suoni provenienti da entrambi siano uguali nella posizione di un ascoltatore posto a $3,75\,m$ direttamente di fronte a uno degli altoparlanti. Trovare le frequenze nell'udibile $(20; 20000\,Hz)$per cui si ha un segnale minimo e massimo.



Soluzione: Il suono proveniente dall'altoparlante deve percorrere una distanza $d_1 = 3,75\,m$, mentre quello proveniente dall'alto

$$d_2 = \sqrt{3,75^2 + 2.0^2} = 4.25\,m$$

Le due onde hanno nel punto considerato la stessa ampiezza. Ciò consente di ricavare la lunghezza d'onda

$$\phi = \frac{2\pi\,(d_2 - d_1)}{\lambda}$$

infatti, un minimo si ha quando $\phi = \left(m + \frac{1}{2}\right)2\pi$, per cui

$$\lambda\left(m + \frac{1}{2}\right) = (d_2 - d_1)$$

cioè

$$\lambda = \frac{0.5}{m + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2m+1}$$

per una frequenza

$$f = \frac{v}{\lambda} = 343\,(2m+1)\ Hz$$

dovendo essere nell'udibile sarà $m = 0, ...28$

si avrà invece una condizione di massimo per $\phi = m2\pi$

$$\lambda = \frac{0.5}{m}$$

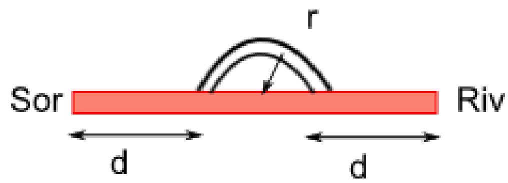
e

$$f = 686m$$

con $m = 0...29$).

INTERFERENZA

Exercise 52. Un'onda sonora di lunghezza d'onda $40.0\,cm$ entra nel tubo in figura. Trovare il minor raggio r tale che si percepisca un minimo nel rivelatore.



Soluzione: Si ha interferenza tra l'onda che segue il percorso rettilineo e quella che passa attraverso la curva superiore. Calcoliamo la differenza nel cammino osservando la figura

$$\begin{aligned} l_1 &= 2s + 2r \\ l_2 &= 2s + \pi r \\ \Delta l &= r\,(\pi - 2) \end{aligned}$$

la differenza di fase risulta quindi

$$\phi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi = \frac{r(\pi - 2)}{0.40\, m} \cdot 2\pi$$

Il minimo al rivelatore si ottiene quando $\phi = \left(m + \frac{1}{2}\right) 2\pi$. Se $m = 0$, si ha $\phi = \pi$, cioè metà lunghezza d'onda. Pertanto,

$$\frac{r(\pi - 2)}{\frac{4}{10}} \cdot 2\pi = \pi$$

da cui, risolvendo rispetto al raggio, si ottiene

$$5r(\pi - 2) = 1$$

da cui

$$r = \frac{1}{5(\pi - 2)} = 0.175\, m = 17.5\, cm$$

3. Intensità e livello sonoro

Exercise 53. Un suono con fronti d'onda sferici è emesso da una sorgente di $1.0\, W$. Supponendo che l'energia delle onde si conservi, trovare l'intensità a $1.0\, m$ sorgente.

Soluzione: L'onda è di tipo sferico, cioè si suppone che il suono si propaghi con la stessa intensità in tutte le direzioni. Se l'energia si conserva allora l'intera energia emessa dalla sorgente si distribuisce sull'intera sfera. L'intensità varia, quindi , come

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1.0\, W}{4\pi\, m^2} = 0.08\, \frac{W}{m^2}$$

Exercise 54. Una sorgente emette onde isotropicamente. L'intensità delle onde a $2.50\, m$ dalla sorgente è $1.91 \cdot 10^{-4}\, W/m^2$. Supponendo che l'energia delle onde si conservi, trovare la potenza della sorgente.

Soluzione: Caso inverso rispetto al precedente esercizio.

$$P = I4\pi r^2 = 1.91 \cdot 10^{-4}\, \frac{W}{m^2} \times 4\pi \times 2.5^2\, m^2 = 0.015\, W$$

Exercise 55. Una nota di frequenza $300\, Hz$ ha un'intensità di $1.00\, \mu W/m^2$. Trovare l'ampiezza delle oscillazioni dell'aria causate da questo suono.

Soluzione: L'intensità è correlata all'ampiezza dello spostamento s_m dalla relazione

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 s_m^2$$

dove $v = 331\, m/s$ è la velocità del suono nell'aria, $\rho = 1.21\, kg/m^3$ è la densità dell'aria e $\omega = 2\pi f$ è la pulsazione. Sostituendo

$$s_m = \sqrt{\frac{2 \times 1.00 \cdot 10^{-6}\, \frac{W}{m^2}}{1.21\, \frac{kg}{m^3} \times 331\, \frac{m}{s} \times 4\pi^2 \times 9.00 \cdot 10^4\, \frac{1}{s^2}}} = 3.7 \cdot 10^{-8}\, m$$

Exercise 56. Due suoni differiscono di $1.00\, dB$ nel livello sonoro. Trovare il rapporto tra l'intensità maggiore e quella minore.

Soluzione: Il livello sonoro è definito come $\beta = \log \frac{I}{I_0}$, dove I_0 è è un'intensità standard di riferimento. In questo caso abbiamo due suoni con diverso livello sonoro, ma entrambi sono riferiti allo stesso livello standard, che pertanto si semplifica. Si ha quindi

$$\log \frac{I_{max}}{I_{min}} = 1.00\, dB = 0.1\, Bell$$

da cui

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = 10^{0.1} = 1.26$$

Exercise 57. Un commesso afferma che un sistema stereo ha una potenza audio massima di $120\,W$. Provando il sistema con numerosi altoparlanti disposti in modo da simulare una sorgente puntiforme. L'acquirente nota che potrebbe avvicinarsi a $1.2\,m$ con il volume massimo prima che il suono provochi dolore alle orecchie. Deve denunciare la ditta per la tutela dei consumatori?

Soluzione: La soglia del dolore è pari a $120\,dB$. L'intensità del suono alla distanza indicata è pari a

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{120\,W}{4\pi \times 1.2^2} = 6.63\,\frac{W}{m^2}$$

Il livello sonoro è quindi

$$\beta = \log\frac{I}{I_0} = \log\frac{6.63}{10^{-12}} = 12.8\,bel = 128\,dB$$

Il suono supera la soglia del dolore.

Exercise 58. Un altoparlante produce un suono con una frequenza di $200\,Hz$ e un'intensità di $0.960\,mW/m^2$ a una distanza di $6.10\,m$. Supponiamo che ci sia riflessione e che l'altoparlante emetta allo stesso modo in tutte le direzioni. Trovare l'intensità a $30.0\,m$, l'ampiezza dello spostamento a $6.10\,m$ e l'ampiezza della pressione a $6.10\,m$.

Soluzione: L'intensità del suono è legata alla potenza emessa e all'inverso del quadrato della distanza. Pertanto, indicata con I_0 l'intensità a $r = 6.10\,m$ e con I_1 quella a $R = 30.0\,m$, si può scrivere

$$I_0 = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad I = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{I_0 4\pi r^2}{4\pi R^2} = \frac{0.960\cdot 10^{-3}\,\frac{W}{m^2}\times (6.10)^2\,m^2}{(30.0)^2\,m^2} = 3.97\cdot 10^{-5}\,\frac{W}{m^2}$$

L'ampiezza dello spostamento a $6.10\,m$ è data da

$$s_m = \sqrt{\frac{2I}{\rho v\omega^2} = \frac{2\times 0.960\cdot 10^{-3}\,\frac{W}{m^2}}{1.21\,\frac{kg}{m^3}\times 331\,\frac{m}{s}\times 4\pi^2\times 200^2\,\frac{1}{s}}} = 1.74\cdot 10^{-6}\,m$$

infine l'ampiezza della pressione

$$\Delta p_m = (v\rho\omega)\,s_m = 331\,\frac{m}{s}\times 1.21\,\frac{kg}{m^3}\times 2\pi\times 200\times 1.74\cdot 10^{-6} = 0.876\,Pa$$

Exercise 59. Una sorgente sonora ha una potenza di $1.00\,\mu W$. Supposta puntiforme, trovare l'intensità a $3.00\,m$ di distanza e il livello sonoro in decibel a tale distanza.

Soluzione: L'intensità è data da

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1.00\cdot 10^{-6}\,W}{4\pi\times 9.00\,m^2} = 8.84\cdot 10^{-9}\,\frac{W}{m^2}$$

il suo livello sonoro è dato da

$$\beta = \log\frac{I}{I_0} = \log\frac{9.0\cdot 10^{-9}}{10^{-12}} = 3.95\,bel = 39.5\,dB$$

Exercise 60. Se due onde sonore, una nell'aria e l'altra nell'acqua dolce hanno la stessa intensità, trovare il rapporto tra l'ampiezza di pressione nell'acqua rispetto a quella nell'aria, supponendo che i due mezzi siano a $20\,^\circ C$. Trovare poi il rapporto tra le intensità nel caso in cui siano uguali le ampiezze di pressione.

Soluzione: L'ampiezza di pressione è data da $\Delta p_m = v\rho\omega s_m$, mentre l'intensità è legata all'ampiezza di pressione da $I = \frac{1}{2}v\rho\omega^2 s_m^2$. Confrontando le due relazioni si ottiene $I = \frac{1}{2}\Delta p_m\omega s_m$. Il rapporto tra le due intensità ($v_{H_2O} = 1481\,\frac{m}{s}$, $\rho_{H_2O} = 1000\,\frac{kg}{m^3}$; $v_{aria} = 343\,\frac{m}{s}$, $\rho_{H_2O} = 1.26\,\frac{kg}{m^3}$) è dato da

$$\frac{I_{H_2O}}{I_{aria}} = \frac{\left(\rho v\omega^2 s_m^2\right)_{H_2O}}{\left(\rho v\omega^2 s_m^2\right)_{aria}} = \frac{1.481\cdot 10^6\left(\omega^2 s_m^2\right)_{H_2O}}{415\left(\omega^2 s_m^2\right)_{aria}}$$

si ha pertanto, essendo uguali le due intensità

$$\frac{\left(\omega^2 s_m^2\right)_{aria}}{\left(\omega^2 s_m^2\right)_{H_2O}} = 3569$$

Confrontando ora le pressioni, si ha

$$\frac{\Delta p_{H_2O}}{\Delta p_{aria}} = \frac{(\omega s_m)_{H_2O}}{(\omega s_m)_{aria}} = \frac{(\omega s_m)_{aria}\times\sqrt{3569}}{(\omega s_m)_{aria}} = 59.7$$

Se ora si pongono uguali le pressioni

$$\frac{\Delta p_{H_2O}}{\Delta p_{aria}} = \frac{(\rho v \omega s_m)_{H_2O}}{(\rho v \omega s_m)_{aria}} = \frac{1.481 \cdot 10^6 \, (\omega s_m)_{H_2O}}{415 \, (\omega s_m)_{aria}}$$

da cui

$$(\omega s_m)_{aria} = 3569 \, (\omega s_m)_{H_2O}$$

prendendo ora il rapporto tra le intensità, si ha

$$\frac{I_{H_2O}}{I_{aria}} = \frac{(\Delta p_m \omega s_m)_{H_2O}}{(\Delta p_m \omega s_m)_{aria}} = \frac{(\omega s_m)_{H_2O}}{(\omega s_m)_{aria}} = \frac{(\omega s_m)_{H_2O}}{3569 \, (\omega s_m)_{H_2O}} = 2.80 \cdot 10^{-4}$$

Exercise 61. Mostrare che l'intensità di un'onda è il prodotto tra l'energia dell'onda per unità di volume u e la sua velocità v. Le onde radio viaggiano a una velocità di $3.00 \cdot 10^8 \, m/s$. Trovare u per un'onda radio a $480 \, km$ da una sorgente di $50 \, kW$, supponendo che le onde siano sferiche.

Soluzione: L'intensità di un'onda è data dal rapporto tra la potenza e la superficie che la intercetta. La potenza è il rapporto tra l'energia e l'intervallo di tempo in cui viene spesa, per cui, costruendo un'equazione dimensionale, si ha

$$[I] = \left[\frac{\frac{J}{s}}{m^2} = \frac{J}{s \cdot m^2} = \frac{J}{\frac{m}{\frac{m}{s}} \cdot m^2} = \frac{J \cdot \frac{m}{s}}{m^3} \right]$$

tradotto in grandezze

$$I = \frac{E \cdot v}{Vol} = u \cdot v$$

Dai dati relativi all'onda radio si ricava

$$I = \frac{50000 \, W}{4\pi \, (480000)^2 \, m^2} = 1.7 \cdot 10^{-8} \, \frac{W}{m^2}$$

da cui

$$u = \frac{I}{v} = \frac{1.7 \cdot 10^{-8} \, \frac{W}{m^2}}{3.00 \cdot 10^8} = 5.67 \cdot 10^{-17} \, \frac{J}{m^3}$$

Exercise 62. Trovare i rapporti delle intensità, delle ampiezze di pressione e delle ampiezze di spostamento delle particelle di due suoni i cui livelli sono differiscono di $37 \, dB$.

Soluzione: Il livello sonoro è espresso da $\beta = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ (in dB) dove $I_0 = 10^{-12} \, W/m^2$ è una intensità standard che corrisponde circa al limite inferiore dei suoni udibili dall'uomo. Nel nostro caso

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0} \\ \beta_2 &= 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0} \end{aligned}$$

calcolando la differenza tra i due livelli e ponendola uguale a $37 \, dB$, si ha

$$37 = 10 \left(\log \frac{I_1}{I_0} - \log \frac{I_2}{I_0} \right)$$

applicando le proprietà dei logaritmi, si riscrive

$$3.7 = \log \frac{I_1}{I_2}$$

da cui

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{3.7} = 5012$$

I suoni differiscono nel livello sonoro ma non nella frequenza, per cui possiamo considerare che $\omega_1 = \omega_2$. Allora

$$\frac{\frac{1}{2} \rho v \, (\omega s_m)_2^2}{\frac{1}{2} \rho v \, (\omega s_m)_1^2} = 5102$$

ma anche ρ e v sono uguali propagandosi nello stesso mezzo, per cui

$$\frac{s_{m2}}{s_{m1}} = \sqrt{5102} = 71$$

lo stesso rapporto vale anche per le ampiezze di pressione essendo $\Delta p = v q \omega s_m$

Exercise 63. A una distanza di $10\,km$ un clacson che suona alla frequenza di $100\,Hz$, considerato come una sorgente puntiforme, è appena udibile. Trovare la distanza alla quale inizia a causare dolore.

Soluzione: La soglia del dolore è posta a $120\,dB$. La differenza nel livello sonoro è pari quindi a $120\,dB$, per cui

$$120 = 10\log\frac{I_2}{I_1}$$

ne segue

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = 10^{12}$$

poiché la potenza del suono emesso è la stessa. Ma $r_2 = 10^4\,m$, per cui

$$r_1 = \sqrt{\frac{10^8}{10^{12}}} = 10^{-2}\,m$$

Exercise 64. Siete fermi a una distanza D da una sorgente che emette onde sonore allo stesso modo in tutte le direzioni. Camminate per $50.0\,m$ verso la sorgente e notate che l'intensità di queste onde è raddoppiata. Calcolare la distanza D.

Soluzione: Il rapporto tra le due intensità (chiamiamo I_1l'intensità corrispondente alla distanza D) è uguale a 2. Pertanto

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = 2$$

essendo $r_2 = (D - 50.0)\ m$, si ha

$$\left(\frac{D}{(D-50)}\right)^2 = 2$$

cioè

$$D^2 = 2D^2 - 200D + 5000$$

e risolvendo rispetto a D, distanza maggiore, si ha

$$D = 100 + \sqrt{10000 - 5000} = 171\,m$$

Exercise 65. Un altoparlante, supposto come puntiforme, emette un suono con una potenza di $30.0\,W$. Un piccolo microfono, la cui sezione orizzontale ha un'area effettiva di $0.750\,cm^2$, è posto a $200\,m$ dall'altoparlante. Calcolare l'intensità del suono dove c'è il microfono e la potenza intercettata dallo stesso.

Soluzione: L'intensità è data da $I = \frac{P}{4\pi r^2}$ e sostituendo i valori assegnati si ha

$$I = \frac{30\,W}{4\pi \times 200^2\,m^2} = 5.97 \cdot 10^{-5}\,\frac{W}{m^2}$$

la potenza intercettata dalla sezione del microfono sarà

$$P_{interc} = IA = 5.97 \cdot 10^{-5}\,\frac{W}{m^2} \times 0.75 \cdot 10^{-4}\,m^2 = 4.48 \cdot 10^{-9}\,W$$

Exercise 66. In un esperimento un jet subsonico vola ad un'altitudine di $100\,m$. L'intensità del suono al suolo è di $150\,dB$. Trovare l'altezza alla quale deve volare l'aereo affinché il rumore non superi i $120\,dB$ (trascurare il tempo finito richiesto dal suono per raggiungere il suolo).

Soluzione: Il rapporto tra le intensità è uguale al rapporto inverso tra i quadrati delle distanze. La differenza del livello sonoro è pari a $30\,dB$

$$30\,dB = 10\log\frac{I_2}{I_1} = 10\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

Si avrà, anche applicando la proprietà dei logaritmi per cui $\log x^2 = 2\log x$ e la proprietà $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$, pertanto

$$1.5 = \log\frac{h}{100} = \log h - \log 100$$

ma $\log 100 = 2$, per cui

$$h = 10^{3.5} = 3162\,m$$

Exercise 67. Un tecnico hi-fi ha progettato un altoparlante di forma sferica che diffonde il suono con la stessa intensità in tutte le direzioni. L'altoparlante emette una potenza acustica di $10\,W$ in una stanza con le pareti, il pavimento e il soffitto completamente assorbenti. Trovare l'intensità delle onde sonore a $3.0\,m$ dal centro della sorgente; l'ampiezza delle onde a $4.0\,m$ rispetto a quella a $3.0\,m$ dal centro della sorgente.

Soluzione: La stanza descritta non riflette alcun suono eliminando in tal modo ogni possibile sovrapposizione di onde. Troviamo l'intensità

$$I=\frac{P}{4\pi r^2}=\frac{10\,W}{4\pi\times 9\,m^2}=8.8\cdot 10^{-2}\,\frac{W}{m^2}$$

L'intensità a $4\,m$ è pari a $\frac{9}{16}$ dell'intensità a $3\,m$. Infatti

$$\left[\frac{I_4}{I_3}=\frac{\frac{P}{64\pi}}{\frac{P}{36\pi}}=\frac{9}{16}\right]$$

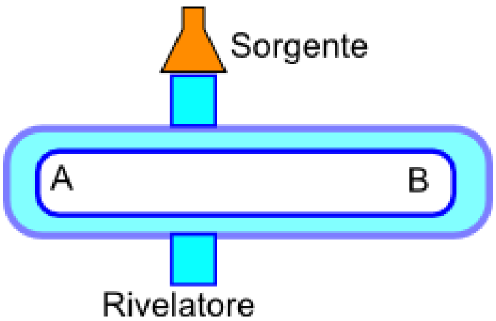
ma

$$\frac{I_4}{I_3}=\frac{s_{m4}^2}{s_{m3}^2}=\frac{9}{16}$$

cioè

$$\frac{s_{m4}}{s_{m3}}=\frac{3}{4}$$

Exercise 68. L'interferometro acustico in figura riempito d'aria è utilizzato per dimostrare l'interferenza delle onde sonore. S è una membrana oscillante; R è un rivelatore di suoni. Il tratto SBR può variare in lunghezza, mentre il tratto SAR è fisso. In R le onde che percorrono il tratto SBR interferiscono con quelle che percorrono il tratto SAR. L'intensità del suono in R ha un valore minimo di 100 unità in una certa posizione di B e con continuità cresce fino a un valore massimo di 900 unità quando B è spostato di $1.65\,cm$. Trovare la frequenza del suono emesso dalla sorgente e il rapporto tra l'ampiezza dell'onda SAR e quella dell'onda SBR in R.



Soluzione: Se lo spostamento orizzontale del tubo mobile è pari a $1.65\,cm$, allora il suono percorrerà una distanza doppia (da S a B e da B a R) pari a $3.30\,cm=0.0330\,m$. Poiché l'interferenza tra le onde passa da un minimo al massimo successivo, tale distanza è pari a metà lunghezza d'onda. Pertanto,

$$0.0330\,m=\frac{\lambda}{2}$$

e conoscendo la velocità del suono, troviamo la frequenza

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{343\,\frac{m}{s}}{0.0660}=5200\,Hz$$

Ricaviamo ora il rapporto tra le ampiezze delle onde. Sappiamo che l'intensità $I=\frac{1}{2}\rho v\omega^2 s_m^2$; ma possiamo porre $k^2=\frac{1}{\frac{1}{2}\rho v\omega^2}$, essendo le grandezze coinvolte uguali per entrambe le onde; ne segue che $s_m=\frac{\sqrt{I}}{k}$. Nella condizione di minimo le ampiezze si sottraggono (interferenza distruttiva) e avremo $s_m=s_{SAR}-s_{SBR}$; nella condizione di massimo si sommano (interferenza costruttiva) $s_m=s_{SAR}+s_{SBR}$. Allora

$$\begin{array}{lcl} min\ \sqrt{100} & = & k\left(s_{SAR}-s_{SBR}\right)\\ max\ \sqrt{900} & = & k\left(s_{SAR}+s_{SBR}\right)\end{array}$$

Sommiamo termine a termine

$$\sqrt{100}+\sqrt{900}=k\left(s_{SAR}-s_{SBR}+s_{SAR}+s_{SBR}\right)=2ks_{SAR}$$

da cui

$$s_{SAR}=\frac{\sqrt{100}+\sqrt{900}}{2k}=\frac{40}{2k}=\frac{20}{k}$$

e sottraendo si ha

$$\sqrt{900}-\sqrt{100}=k\left(s_{SAR}+s_{SBR}-s_{SAR}+s_{SBR}\right)=2ks_{SBR}$$

da cui

$$s_{SBR}=\frac{\sqrt{900}-\sqrt{100}}{2k}=\frac{20}{2k}=\frac{10}{k}$$

il rapporto sarà pertanto

$$\frac{s_{SAR}}{s_{SBR}}=2$$

:

4. Sorgenti di suoni musicali

Exercise 69. Un'onda sonora di frequenza 1000 Hz che si propaga attraverso l'aria ha un'ampiezza di pressione di 10.0 Pa. Trovare la sua lunghezza d'onda, l'ampiezza di spostamento di una particella e la massima velocità di una particella. Se questa è la frequenza di una canna d'organo con entrambe le estremità aperte, trovare la lunghezza della canna.

Soluzione: La relazione che lega la frequenza alla lunghezza d'onda è $v=\lambda f$, per cui

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{343\,\frac{m}{s}}{1000\,s^{-1}}=0.343\,m$$

l'ampiezza di spostamento è data da

$$s_m=\frac{\Delta p_m}{2\pi v\rho f}=\frac{10.0\,Pa}{2\pi\times 343\,\frac{m}{s}\times 1.21\,\frac{kg}{m^3}\times 1000\,s^{-1}}=3.84\cdot 10^{-6}\,m=3.84\,\mu m$$

la massima velocità di spostamento di una particella di aria nella sua oscillazione longitudinale sarà ????????

Exercise 70. Un'onda sonora in un mezzo fluido è riflessa a una barriera in modo che si formi un'onda stazionaria. La distanza tra i nodi è 3.8 cm e la velocità di propagazione è 1500 m/s. Trovare la frequenza.

Soluzione: La distanza tra due nodi consecutivi rappresenta metà della lunghezza d'onda, pertanto

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{1500\,\frac{m}{s}}{0.076\,m}=19737\,Hz$$

Exercise 71. Una corda di violino lunga 15.0 cm, fissata a entrambe le estremità, oscilla nella sua modalità caratterizzata da $n=1$. La velocità delle onde sulla corda è 250 m/s e la velocità del suono nell'aria è 348 m/s. Trovare la frequenza e la lunghezza d'onda dell'onda sonora emessa.

Soluzione: la corda del violino, vincolata ad entrambi i lati, vibra formando onde stazionarie, le cui frequenze di risonanza sono multipli interi della frequenza di risonanza minora, caratterizzata da $n=1$.

$$f=\frac{v}{2L}n=\frac{250\,\frac{m}{s}}{2\times 0,15\,m}=833\,Hz$$

la lunghezza d'onda, nota frequenza e velocità, è data da

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{348\,\frac{m}{s}}{833\,s^{-1}}=0.418\,m$$

Exercise 72. Una corda di violino, che oscilla col suo schema fondamentale, genera un'onda sonora con lunghezza d'onda λ. Trovare il multiplo di cui va aumentata la tensione se la corda, che oscilla ancora nel suo schema fondamentale, deve generare una nuova onda sonora con lunghezza d'onda $\lambda/2$.

Soluzione: La tensione di una corda è legata alla velocità di propagazione di un'onda che si genera su di essa dalla relazione

$$v=\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

dove τ è la tensione della corda e μ la densità lineare della corda, cioè m/L. Ma $v=\lambda f$, e sostituendo, si ha

$$\lambda f=\sqrt{\frac{\tau L}{m}}$$

ne segue che affinché la lunghezza d'onda dimezzi, la tensione, che compare sotto radice, deve essere moltiplicata per un fattore 4.

Exercise 73. Una canna d'organo A, con entrambe le estremità aperte, ha una frequenza fondamentale di $300\,Hz$. La terza armonica di una canna d'organo B, con una estremità aperta, ha la stessa frequenza della seconda armonica della canna A. Trovare la lunghezza delle due canne.

Soluzione: Le frequenze di una canna d'organo, assimilabile ad uno strumento a fiato, aperta da entrambi i lati è data da
$$f=\frac{nv}{2L_A}$$
dove n è il numero armonico, v la velocità del suono e L la lunghezza della canna. Se la canna B è aperta da un solo lato, allora le frequenze sono date da
$$f=\frac{nv}{4L_B}$$
Se la canna A, ha una frequenza di $300\,Hz$ per $n=1$, si ha
$$L_A=\frac{v}{2f}=\frac{343}{600}=0.572\,m$$
Se, pertanto, la terza armonica della canna B ($n=3$) ha la stessa frequenza della seconda armonica ($n=2$) della canna A, allora
$$\frac{3v}{4L_B}=\frac{2v}{2L_A}$$
e
$$L_B=\frac{3}{4}L_A=0.429\,m$$

Exercise 74. Il livello dell'acqua in un tubo di vetro verticale lungo $1.00\,m$ può essere regolato in qualsiasi posizione del tubo. Un diapason che vibra a $686\,Hz$ è tenuto proprio sopra l'estremità aperta superiore del tubo. Trovare la posizione del livello dell'acqua per la quale vi sarà risonanza.

Soluzione: la velocità del suono nell'aria è $343\,m/s$ e la lunghezza d'onda del suono emesso dal diapason sarà $\lambda=\frac{v}{f}=0.5\,m$ e la prima lunghezza d'onda di risonanza sarà $\lambda=\frac{4L}{n}$; se $n=1,3,5,7....$, si avrà
$$L=\frac{n\lambda}{4}=\frac{1}{8},\frac{3}{8}\frac{5}{8},\frac{7}{8}...m$$

Exercise 75. Trovare la velocità delle onde su una corda di violino di $800\,mg$ lunga $22.0\,cm$ se la frequenza fondamentale è $920\,Hz$. Trovare poi la tensione della corda. Considerando l'onda fondamentale, trovare la lunghezza d'onda delle onde sulla corda e delle onde sonore emesse dalla corda.

Soluzione: La relazione tra la velocità di un'onda sulla corda e e la frequenza è data da
$$f=\frac{v}{2L}n$$
per la frequenza fondamentale $n=1$, per cui
$$v=2Lf=2\times 0.22\,m\times 920\,Hz=405\,\frac{m}{s}$$
la relazione tra la tensione e la velocità è
$$v=\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$
dove τ è la tensione e μ la densità lineare, cioè $^{m}/_{L}$, pertanto
$$\tau=\mu v^2=\frac{8.0\cdot 10^{-4}\,kg}{0.22\,m}\times 405^2\,\frac{m^2}{s^2}=596\,N$$
la lunghezza d'onda delle onde sulla corda sarà
$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{405}{920}=0.440\,m$$
mentre la lunghezza d'onda delle onde sonore prodotte sarà
$$\lambda=\frac{343}{920}=0.373\,m$$

Exercise 76. Una corda di violino lunga $30.0\,cm$ tra le sue estremità fisse con una massa di $2.0\,g$, genera un LA ($440\,Hz$) quando viene suonata a corda libera. Trovare la posizione del dito sulla corda per ottenere un DO ($528\,Hz$); il rapporto tra la lunghezza d'onda delle onde sulla corda richiesta per un LA e per un DO; il rapporto tra la lunghezza d'onda dell'onda sonora per un LA e per un DO.

Soluzione: la velocità dell'onda sulla corda, ricavata nella condizione di corda fissa, è

$$v = 2Lf = 2 \times 0.30\,cm \times 440\,Hz = 264\,\frac{m}{s}$$

a parità di velocità, è possibile ricavare la lunghezza della corda per ottenere il DO

$$L_1 = \frac{v}{2f} = \frac{264}{2 \times 528} = 0.25\,cm$$

per cui il dito va posto a una distanza di $5.0\,cm$ dalla chiave; il rapporto tra le lunghezze d'onda sulla corda è

$$\frac{\lambda_{LA}}{\lambda_{DO}} = \frac{f_{DO}}{f_{LA}} = \frac{528}{440} = 1.2$$

ricavabile sempre dalla relazione che lega la velocità alla lunghezza d'onda e alla frequenza. Per la lunghezza d'onda dell'onda sonora, il rapporto sarà lo stesso, variando solo la velocità di propagazione nel mezzo, che è la stessa per entrambe le note.

Exercise 77. Una corda di violoncello ha una lunghezza L, per la quale la frequenza fondamentale è f. Trovare di quale lunghezza l deve essere accorciata la corda toccandola con un dito per cambiare la frequenza fondamentale in rf; trovare l se $L = 0.80\,m$ e $r = 1.2$ e in tal caso trovare il rapporto tra la lunghezza d'onda della nuova onda sonora e quella emessa prima di toccare la corda.

Soluzione: la velocità di propagazione rimane costante per cui, da $v = 2Lf$ è possibile, sostituendo, ottenere $L_1 = \frac{2Lf}{2rf} = \frac{L}{r}$; l'accorciamento $l = L - L_1$, per cui

$$l = L\left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

se $L = 0.80\,m$ e $r = 1.2$, si ha $l = 0.13\,m$ e il rapporto tra le due lunghezze d'onda è

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{f}{rf} = \frac{1}{r} = \frac{5}{6}$$

Exercise 78. Nella figura, S è un piccolo altoparlante pilotato da un segnale audio amplificato, di frequenza regolabile solo da 1000 a $2000\,Hz$. Il tubo D è un pezzo di tubo cilindrico lungo $72\,cm$ e aperto a entrambe le estremità. Se la velocità del suono è $345\,m/s$, trovare la frequenza alla quale si verificherà risonanza nella canna durante la variazione della frequenza nell'intervallo indicato.

Soluzione: La frequenza fondamentale di risonanza per un tubo aperto da entrambi i lati è data da

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{345}{1.44} = 240\,Hz$$

per cui nell'intervallo $1000 - 2000\,Hz$ si avranno le frequenze per $n = 5, 6, 7, 8$, cioè

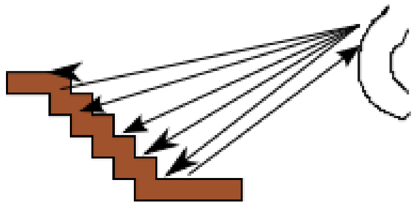
$$f = 1200,\ 1440,\ 1680,\ 1880\,Hz$$

Exercise 79. Un pozzo con pareti verticali e acqua sul fondo risuona a $7.00\,Hz$ e a nessuna frequenza inferiore. L'aria nel pozzo ha una densità di $1.10\,kg/m^3$ e un modulo di compressibilità di $1.33 \cdot 10^5\,Pa$. Trovare la profondità del pozzo.

Soluzione: il modulo di compressibilità può essere espresso come $B = \rho v^2$, mentre la frequenza di $7.00\,Hz$ può essere considerata quella fondamentale; il pozzo è chiuso ad una estremità per cui la frequenza di risonanza è data da $f = \frac{v}{4L}$; sostituendo il valore di v e risolvendo rispetto a L, si ottiene

$$L = \frac{\sqrt{\frac{B}{\rho}}}{4f} = \frac{\sqrt{\frac{1.33 \cdot 10^5\,Pa}{1.10\,\frac{kg}{m^3}}}}{4 \times 7.00\,Hz} = 12.4\,m$$

Exercise 80. Un battito di mani sul palcoscenico di un anfiteatro invia onde sonore che si diffondono dai gradini di larghezza $w = 0.75\,m$. Il suono ritorna verso il palcoscenico come una serie periodica di impulsi, una da ogni gradino; l'insieme degli impulsi dà l'effetto di una nota stonata. Trovare la frequenza con la quale ritornano gli impulsi, cioè della nota percepita.



Soluzione: Consideriamo una sequenza di impulsi che ritornano verso il palcoscenico. Un impulso che ritorna subito prima di quello precedente ha percorso una distanza di $2w$; impiegando un tempo maggiore $\Delta t = \frac{2w}{v}$, che possiamo considerare come il periodo. La frequenza dell'impulso sarà pertanto

$$f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{v}{2w} = \frac{343\,\frac{m}{s}}{2 \times 0.75\,m} = 230\,m$$

Exercise 81. Un tubo lungo $1.20\,m$ è chiuso a un'estremità. Un filo teso è posto vicino all'estremità aperta. Il filo è lungo $0.330\,m$ e ha una massa di $9.60\,g$: è fissato a entrambe le estremità e vibra nel suo schema fondamentale. Esso fa oscillare la colonna d'aria nel tubo alla sua frequenza fondamentale in condizioni di risonanza. Trovare la frequenza di oscillazione della colonna d'aria e la tensione del filo.

Soluzione: La velocità di propagazione del suono prodotto dalla corda vibrante è uguale a $343\,m/s$; questa onda produrrà un'onda stazionaria fondamentale nel tubo la cui frequenza è data da

$$f = \frac{v}{4L} = \frac{343\,\frac{m}{s}}{4 \times 1.20\,m} = 71.5\,Hz$$

la tensione della corda vibrante sarà espressa da

$$\tau = \frac{v^2 m}{L} = \frac{(2L_{filo}f)^2\,m}{L} = 4L_{filo}mf^2 = 4 \times 0.330 \times 9.60 \cdot 10^{-3}\,kg \times 71.5^2 = 64.7\,N$$

5. Effetto Doppler

Exercise 82. Una sorgente S genera onde circolari sulla superficie di un lago. La velocità delle onde è $5.5\,m/s$ e la separazione tra le creste è $2.3\,m$. Se una persona si trova su una piccola barca che si dirige direttamente verso S a una velocità costante di $3.3\,m/s$ rispetto alla riva, trovare la frequenza delle onde da essa osservate.

Soluzione: La sorgente genera onde circolari di lunghezza d'onda pari alla separazione tra le creste, cioè $\lambda = 2.3\,m$. La frequenza delle onde generate sarà

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{5.5\,\frac{m}{s}}{2.3\,m} = 2.4\,Hz$$

Nel nostro caso la sorgente è ferma, mentre l'osservatore è in movimento, per cui la frequenza percepita risulterà maggiore, poiché il rivelatore si muove verso la sorgente incontrando le onde prima

$$f' = f\frac{v_{onda} + v_{barca}}{v_{onda}} = 2.4 \times \frac{5.5 + 3.3}{5.5} = 3.8\,Hz$$

Exercise 83. Il rumore delle turbine nei motori a reazione di un aereo che vola alla velocità di $200\,m/s$ ha frequenza di $16000\,Hz$. Trovare la frequenza alla quale è udito da un pilota di un secondo aereo, che cerca di raggiungere il primo alla velocità di $250\,m/s$.

Soluzione: In questo caso sia la sorgente sia il rivelatore sono in movimento, per cui la frequenza udita è

$$f' = f\frac{v + v_R}{v - v_S} = 16000 \times \frac{343 + 250}{343 + 200} = 17500\,Hz$$

Exercise 84. Una pallottola viene sparata a una velocità di $700\,m/s$. Trovare l'angolo formato dal cono d'urto con la direzione del moto della pallottola.

Soluzione: Il moto del proiettile è superiore alla velocità del suono nell'aria; in questo caso la sorgente si muove più velocemente dei fronti d'onda dell'aria spostata dalla punta del proiettile e, raggruppandosi, formano un'onda d'urto, dovuta ad un brusco aumento e successiva caduta della pressione dell'aria. Tutti i fronti d'onda sferici si espandono alla velocità del suono e si distribuiscono lungo la superficie di un cono, la cui superficie forma un semi angolo θ ed è tangente a tutti i fronti d'onda. Tale angolo è dato da

$$\sin\theta = \frac{v_{suono}}{v_{sorgente}}$$

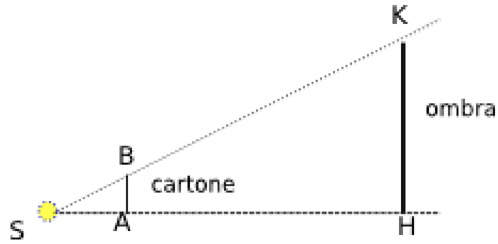
risolvendo rispetto all'angolo si ha

$$\theta = \arcsin\left(\frac{343}{700}\right) = 29.3^\circ$$

6. La propagazione rettilinea

Exercise 85. Un foglio di cartone opaco, avente la forma di un quadrato di lato $4.0\,cm$, intercetta la luce proveniente da una lampada puntiforme posta perpendicolarmente al foglio a $10\,cm$ di distanza. Calcolare il lato dell'ombra quadrata che si forma su uno schermo situato a $40\,cm$ dalla sorgente.

Soluzione:: possiamo schematizzare il fenomeno con il seguente modello geometrico



Ricordando che in due triangoli sono simili i lati corrispondenti sono tra loro proporzionali, si può scrivere

$$SA : SH = AB : HK$$

cioè

$$10\,cm\ :\ 40\,cm\ = 4\,cm\ : HK$$

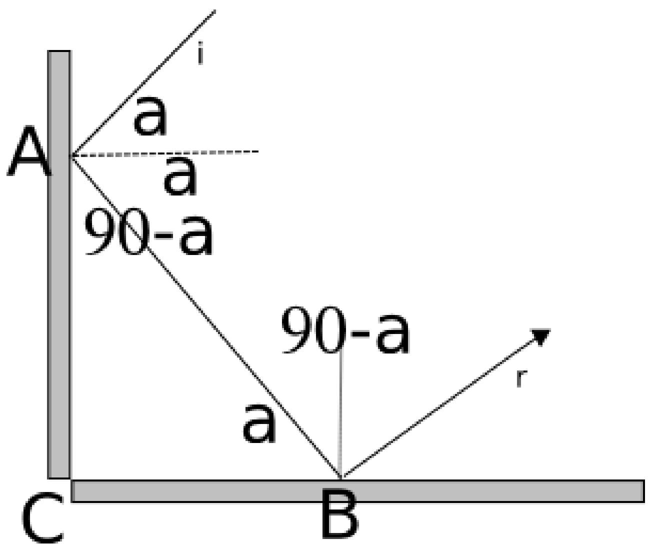
da cui

$$HK = \frac{160\,cm^2}{10\,cm} = 16\,cm$$

7. Onde Luminose

7.1. Riflessione e rifrazione.

Exercise 86. La figura mostra un raggio luminoso, proveniente dall'alto, riflesso da due superfici perpendicolari. Trovare l'angolo tra il raggio incidente i e il raggio riflesso r.



Soluzione: La riflessione della luce segue due leggi: il raggio riflesso è uguale a quello incidente; i due raggi e la perpendicolare alla superficie riflettente sono complanari. La soluzione, ottenibile per via geometrica, è indicata nella figura.

Exercise 87. Un raggio di luce nel vuoto incide su di una lastra di vetro. Nel vuoto il raggio incidente forma un angolo di $32,0°$ con la normale alla superficie, mentre nel vetro il raggio rifratto è inclinato di $21,0°$ rispetto alla normale. Trovare l'indice di rifrazione del vetro.

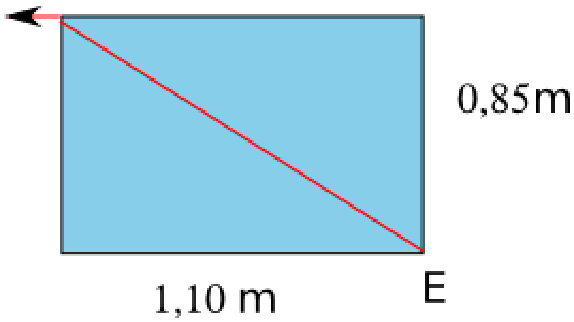
Soluzione: La rifrazione di un raggio luminoso si ha nel passaggio della luce da un mezzo ad uno con densità ottica diversa, come appunto il vuoto e il vetro. In questo caso si parla di indice di rifrazione assoluto. La legge della rifrazione è data da

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_{vetro}}{n_{vuoto}}$$

sapendo che $n_{vuoto} = 1$, si ha

$$\frac{\sin 32,0}{\sin 21,0} = n_{vetro} = 1.48$$

Exercise 88. Nella figura è mostrata una vasca metallica a sezione rettangolare piena di un liquido fino al bordo. Un osservatore con occhi a livello del bordo della vasca è in grado di vedere, al limite, lo spigolo E; la figura mostra un raggio che va da E all'osservatore. Calcola l'indice di rifrazione del liquido



Soluzione: Il raggio di luce, in rosso, rappresenta, nel modello geometrico, la diagonale del rettangolo che lo divide in due triangoli rettangoli uguali. Possiamo quindi, con le relazioni della goniometria, trovare l'angolo che tale raggio forma con la base del rettangolo (angolo di incidenza):

$$\alpha = \arctan\left(\frac{0.85}{1.10}\right) = 37.7°$$

Il raggio luminoso emerge formando un angolo limite (uguale a $0°$ con la normale alla superficie di separazione). Essendo $n_{aria} = 1$ l'indice di rifrazione assoluto dell'aria, si ha

$$n_{liquido} = \frac{n_{aria}}{\sin 37.7°} = 0.61$$

Exercise 89. Intorno all'anno $150\, d.C.$, Claudio Tolomeo attribuì le seguenti misure all'angolo si incidenza i_1e all'angolo di rifrazione i_2, per un raggio di luce che passa dall'aria all'acqua:

i_1	i_2	i_1	i_2
10°	8°	50°	35°
20°	15°30′	60°	40°30′
30°	22°30′	70°	45°30′
40°	29°	80°	50°

Verificare se questi dati sono in accordo con la legge di rifrazione e, in caso affermativo, ricavare l'indice di rifrazione.

Soluzione: La legge di rifrazione dice che il rapporto tra il seno dell'angolo incidente e rifratto è uguale al rapporto inverso tra gli indici di rifrazione assoluti dei due mezzi, cioè

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1} = k$$

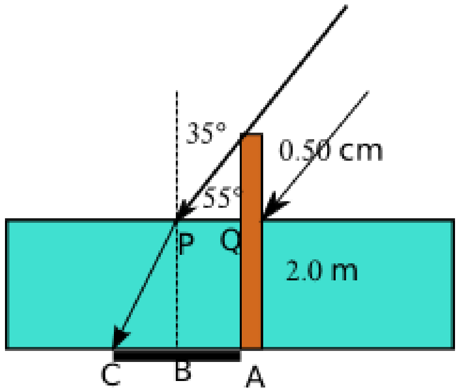
Applicando tale legge ai valori assegnati si ha

$\frac{\sin i_1}{\sin i_2}$	k	$\frac{\sin i_1}{\sin i_2}$	i_2
$\frac{\sin 10°}{\sin 8°}$	1.248	$\frac{\sin 50°}{\sin 35°}$	1.336
$\frac{\sin 20°}{\sin 15°30'}$	1.280	$\frac{\sin 70°}{\sin 45°30'}$	1.317
$\frac{\sin 30°}{\sin 22°30'}$	1.306	$\frac{\sin 80°}{\sin 50°}$	1.286
$\frac{\sin 40°}{\sin 29°}$	1.326		

il valore tende ad essere costante e in media uguale a $1,300$, assegnando a $n_1 = n_{aria} = 1$ si può ottenere l'indice di rifrazione dell'acqua

$$n_2 = 1,300$$

Exercise 90. Un palo verticale lungo $2\,m$ si erge dal fondo di una piscina fino ad una quota di $50.0\,cm$ sopra la superficie dell'acqua. La luce del sole incide con un angolo di $55.0°$ rispetto al piano orizzontale. Trovare la lunghezza dell'ombra proiettata dal palo sul fondo piano e orizzontale della piscina.



Soluzione: la figura illustra il fenomeno. L'ombra è quella evidenziata in nero. Essa può essere calcolata sommando i due segmenti $AB = PQ$ e BC. Applicando la trigonometria si ha

$$AB = 0.50 \cdot \tan 35° = 0,35\,m$$

Per calcolare BC si deve tenere conto che il raggio penetrando nell'acqua viene deviato. È quindi necessario calcolare l'angolo di rifrazione che determina la direzione di propagazione nel mezzo acqua mediante la legge che descrive il fenomeno di rifrazione alla superficie di separazione tra due mezzi diversi:

$$\frac{\sin 35°}{\sin r} = 1,33$$

da cui

$$r = \arcsin\left(\frac{\sin 35°}{1,33}\right) = 25.6°$$

Questo angolo è l'angolo $B\hat{P}C$ in figura. Pertanto,

$$BC = 2 \cdot \tan 25.6° = 0.96\,cm$$

La lunghezza complessiva dell'ombra è

$$AC = 0,35 + 0,96 = 1,21\,m$$