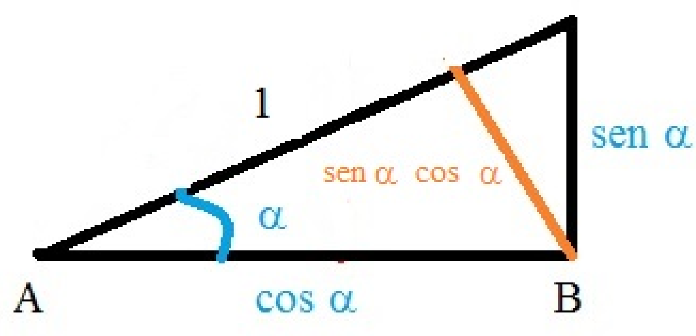
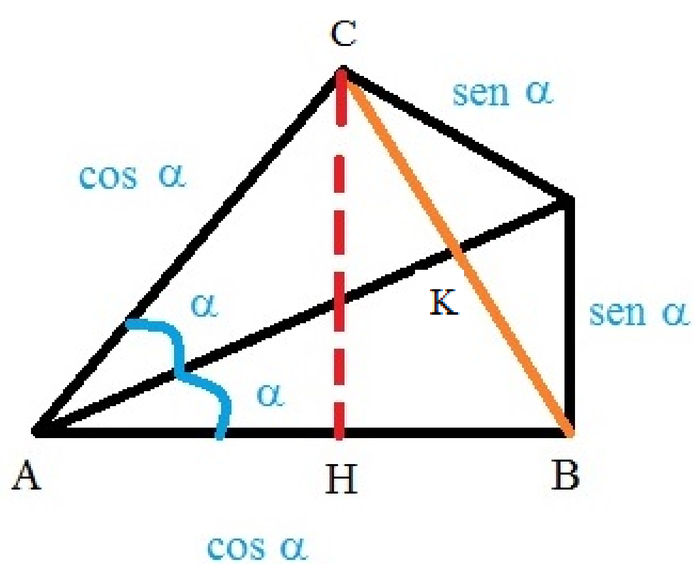
FORMULE DI DUPLICAZIONE

Abbiamo il triangolo unitario



Sovrapponendo sull'ipotenusa un altro triangolo uguale otteniamo l'angolo 2 α



Nel triangolo rettangolo AHC : AC = cos α , AH $= \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha$ e CH $= \cos\alpha \cdot sen\, 2\alpha$.
Nel triangolo ABC possiamo calcolare l'area in due modi

rispetto alla base $AB = \cos\alpha$ e altezza $CH = \cos\alpha \text{ sen } 2\alpha$
rispetto alla base $BC = 2 \text{ sen } \alpha \cos\alpha$ e altezza $AK = \cos^2\alpha$

Uguagliando le aree abbiamo :

$$\frac{\cos^2\alpha \cdot sen2\alpha}{2} = \frac{2 \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos^2\alpha}{2}$$

da cui $solve\left(\frac{\cos^2\alpha \cdot sen2\alpha}{2} = \frac{2 \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos^2\alpha}{2}, sen2\alpha\right)$

$$2\, sen\alpha \cos\alpha \qquad \textbf{(1)}$$

$$\text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cos\alpha$$

La formula per $\cos 2\alpha$ si ricava utilizzando la relazione fondamentale

$$cos2\alpha = \sqrt{1 - sen^2 2\alpha} = \sqrt{1^2 - 4 \cdot sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} =$$

$$\sqrt{\left(\cos^2\alpha + sen^2\alpha\right)^2 - 4 \cdot \left(sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\right)} = \sqrt{\cos^4\alpha + 2 \cdot sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + sen^4\alpha - 4 \cdot sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$$

$$= \sqrt{\left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right)^2}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - sen^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\, sen^2\alpha \end{aligned}$$

Infine la formula per $tg\, 2\alpha$ si ricava attraverso la definizione $tg\, 2\alpha = \frac{sen\, 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$$tg\, 2\alpha = \frac{2 \cdot sen\,\alpha \cdot cos\alpha}{\cos^2\alpha - sen^2\alpha} = \frac{\frac{2 \cdot sen\alpha \cdot cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha - sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \qquad tg\, 2\alpha = \frac{2 \cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$