VETTORI

Costruzione di un vettore bidimensionale

Nel piano con un righello si traccia una retta **r** tratteggiata
Su **r** si disegna un segmento di lunghezza **l**
Ad una delle estremità si disegni la punta di una freccia mantenendo sempre la lunghezza **l**
Indichiamo con $\bar{V}$ il segmento orientato

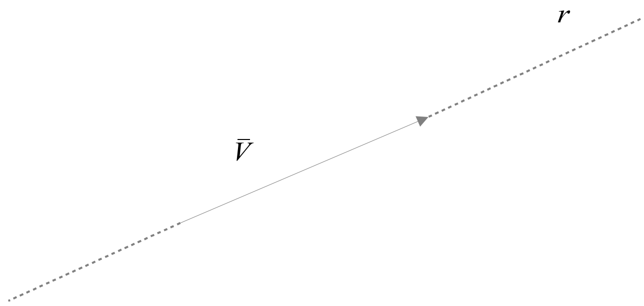


Figura 1

parliamo di **vettore** $\bar{V}$ con

modulo **l** [1]

direzione **r**

verso indicato dalla punta della freccia

Se r ' r'' sono rette // ad r allora possiamo costruire altri vettori $\bar{V}$

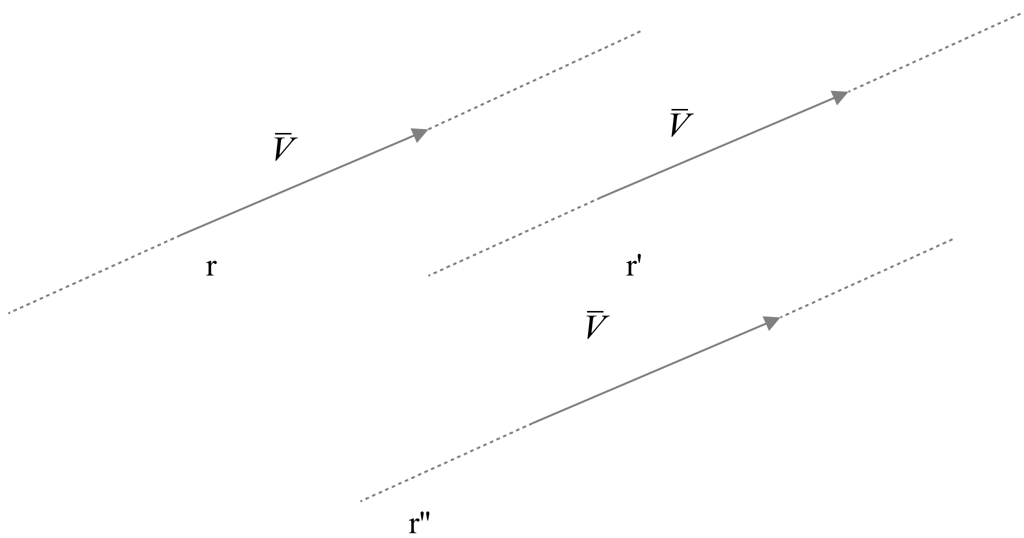


Figura 2

1 Nel seguito indicheremo il modulo del vettore $\bar{V}$ con la scrittura $|\bar{V}|$

In sostanza parleremo di **<u>vettore</u>** $\bar{V}$ e diremo che nella figura 2 sono disegnati tre suoi *<u>rappresentanti</u>* .

Disegneremo il vettore opposto $-\bar{V}$ come il vettore avente stesso modulo e $\bar{V}$ direzione di ma verso contrario

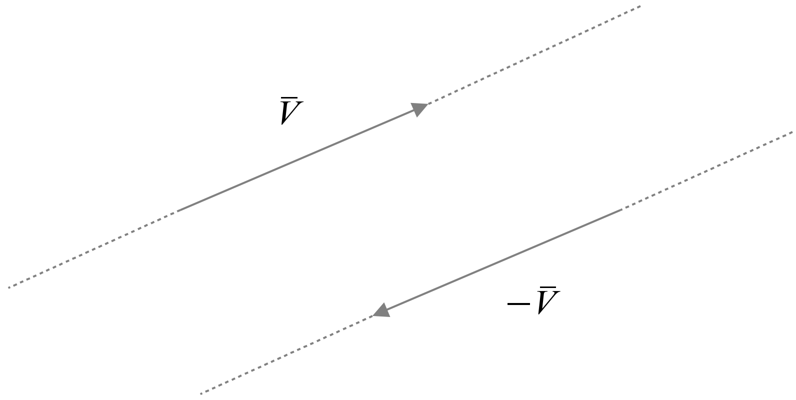


Figura 3

Se due vettori $\bar{V}_1$ e $\bar{V}_2$ sono disegnati a partire dal punto A in cui le loro rette direzione hanno un punto in comune possiamo costruire il **vettore somma** $\bar{V}_1 + \bar{V}_2$

(regola del parallelogramma :

disegnare i vettori $\bar{V}_1$ e $\bar{V}_2$

dalla punta del primo vettore tracciare un vettore rappresentate di $\bar{V}_2$

il vettore somma è il vettore che ha origine comune ai due vettori e fine nella punta del vettore $\bar{V}_2$)

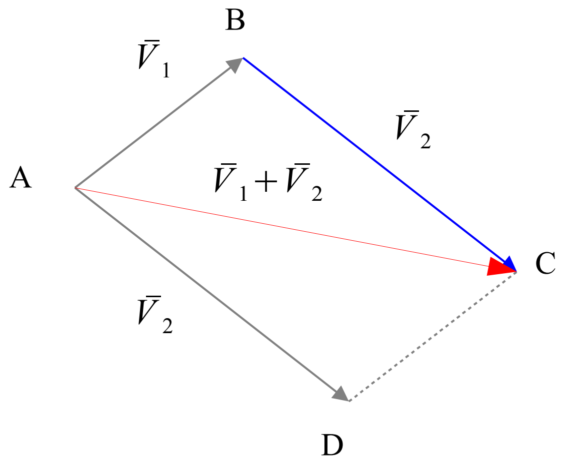


Figura 4

La *somma vettoriale* è :

commutativa (scambiando l'ordine degli addendi il risultato non cambia) $\bar{V}_1+\bar{V}_2=\bar{V}_2+\bar{V}_1$

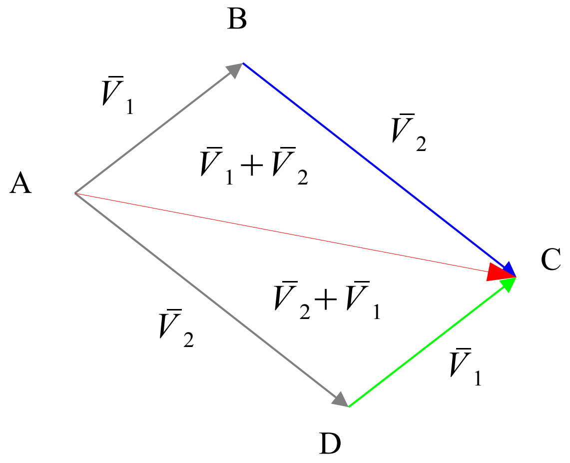


Figura 5

associativa (spostando le parentesi il risultato non cambia) $(\bar{V}_1+\bar{V}_2)+\bar{V}_3=\bar{V}_1+(\bar{V}_2+\bar{V}_3)$

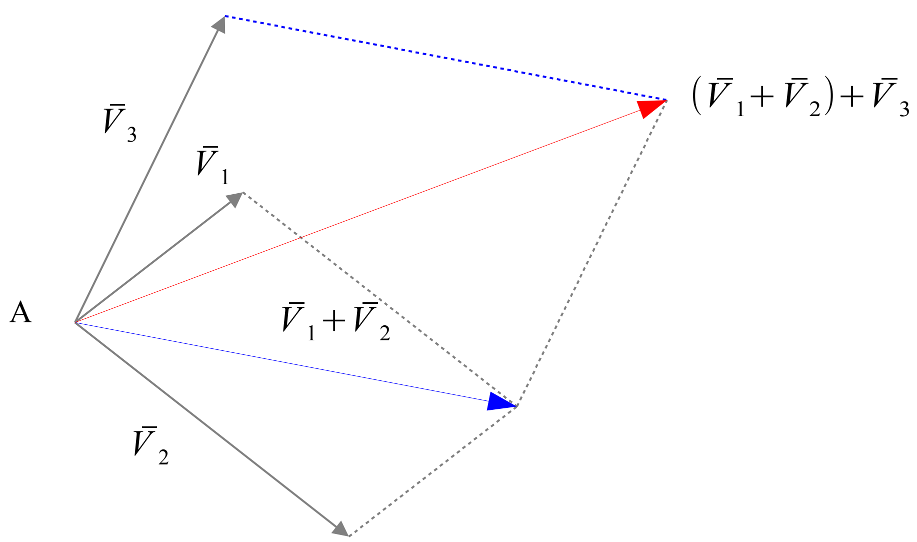


Figura 6a costruzione del "percorso vettoriale" V_1 V_2 V_3

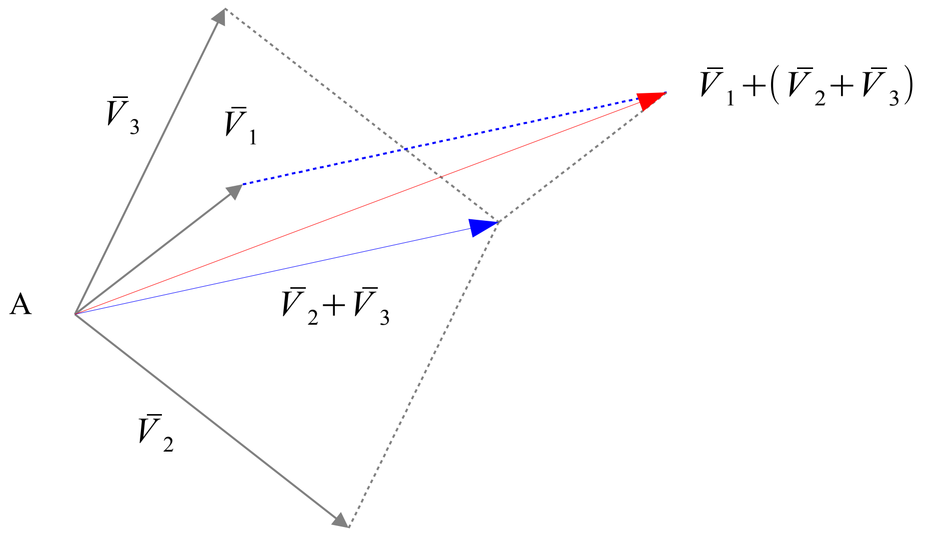


Figura 6b costruzione del "percorso vettoriale" V_2 V_3 V_1

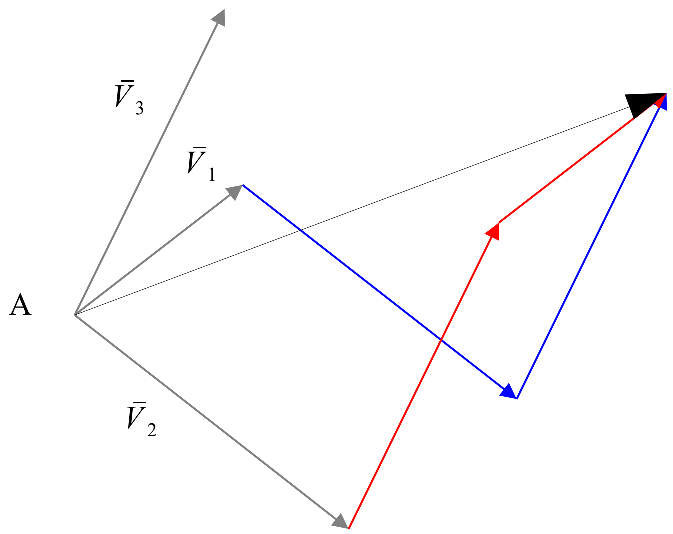


Figura 6 c

Riportando sullo stesso disegno i due percorsi osserviamo che si giunge nel medesimo punto finale e pertanto i vettori finali $(\bar{V}_1+\bar{V}_2)+\bar{V}_3$ e $\bar{V}_1+(\bar{V}_2+\bar{V}_3)$ coincidono

Sommando un vettore $\bar{V}_1$ con il suo opposto $-\bar{V}_1$ otteniamo il **vettore nullo** $\bar{0}$

che ha : modulo 0
direzione indefinita
verso indefinito

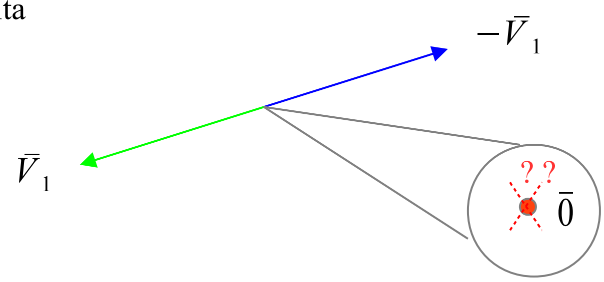


Figura 7

Prodotto di un vettore per uno scalare

Chiamiamo <u>scalare</u> un numero reale λ

La scrittura $\lambda\bar{V}$ che ha il significato di <u>prodotto dello scalare</u> λ <u>per il vettore</u> $\bar{V}$ identifica un nuovo vettore che ha :

come modulo $\lambda * |\bar{V}|$ (λ volte il modulo di $\bar{V}$)

come direzione la stessa di $\bar{V}$

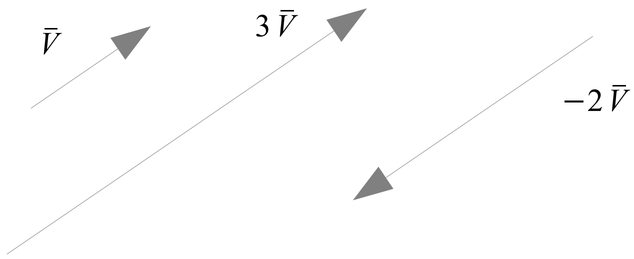
come verso : lo stesso di $\bar{V}$ se $\lambda>0$

opposto a quello di $\bar{V}$ se $\lambda<0$

Nel caso in cui $\lambda=0$ il vettore $\lambda\bar{V}$ sarà il vettore nullo $\bar{0}$.

Esempio.

Assegnato il vettore $\bar{V}$ disegnare i vettori $3\bar{V}$ e $-2\bar{V}$



Prodotto scalare di due vettori

E' un'operazione che a due vettori $\bar{V}_1$ e $\bar{V}_2$ associa il numero reale $\langle \bar{V}_1, \bar{V}_2 \rangle$ così costruito :

si proietta il vettore $\bar{V}_1$ sulla direzione del vettore $\bar{V}_2$ ottenendo un vettore $\bar{V}_1'$

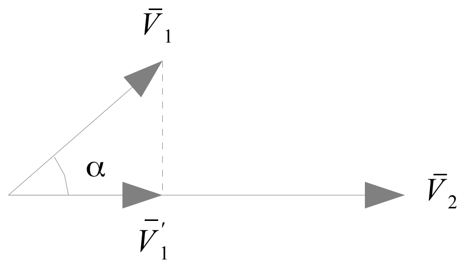


Figura 8

si moltiplica il modulo di $\bar{V}_1'$ per il modulo di $\bar{V}_2$

o in modo equivalente

si moltiplica il modulo di $\bar{V}_1$ per il modulo di $\bar{V}_2$ per il coseno dell'angolo α

fra essi compreso (α è definito tra $\bar{V}_2$ e $\bar{V}_1$ in senso antiorario)

$$\langle \bar{V}_1, \bar{V}_2 \rangle = |V_1'||V_2| = |V_1||V_2|\cos\alpha \qquad [1]$$

Casi particolari

a) il prodotto scalare di un vettore con se stesso è uguale al quadrato del suo modulo

$$\langle \bar{V}_1, \bar{V}_1 \rangle = |V_1|^2 \qquad [2]$$

Basta porre nella [1] $|V_1| = |V_2|$ e ricordare che $\cos 0 = 1$

b) il prodotto scalare tra due vettori ortogonali è il numero 0

Basta ricordare che due vettori sono ortogonali quando l'angolo fra essi compreso è retto $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ e

che $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

VETTORI NEL PIANO CARTESIANO

Abbiamo visto nei precedenti corsi di matematica che con **<u>piano cartesiano</u>** si intende :

un piano con fissate due rette orientate tra loro perpendicolari dette asse delle ascisse (asse x)
e asse delle ordinate (asse y)

il loro punto in comune O è chiamato origine degli assi cartesiani

sull'asse x assegnata una unità di misura U si assegnano ai punti (a partire da O) numeri positivi verso destra e numeri negativi verso sinistra

sull'asse y assegnata una unità di misura U si assegnano ai punti (a partire da O) numeri positivi verso l'alto e numeri negativi verso il basso

ogni punto P del piano si proietta sull'asse x e sull'asse y definendo una coppia di numeri (x_p, y_p)
le coordinate di P : x_p indica l'ascissa

y_p indica l'ordinata

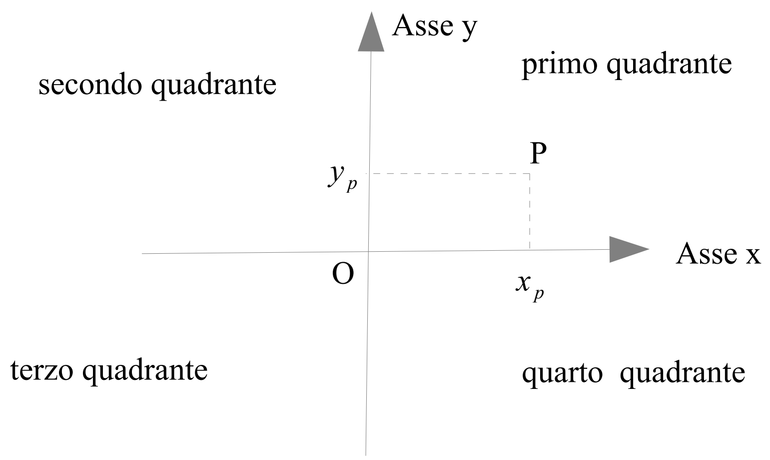


Figura 9

Gli assi cartesiani dividono il piano in quattro quadranti contati in senso antiorario
In un piano cartesiano ad ogni punto è associata un'unica coppia di numeri; punti diversi hanno coordinate diverse e in particolare :

l'origine O ha coordinate (0,0)

un punto che appartiene all'asse x ha sempre <u>ordinata 0</u>

un punto che appartiene all'asse y ha sempre <u>ascissa 0</u>

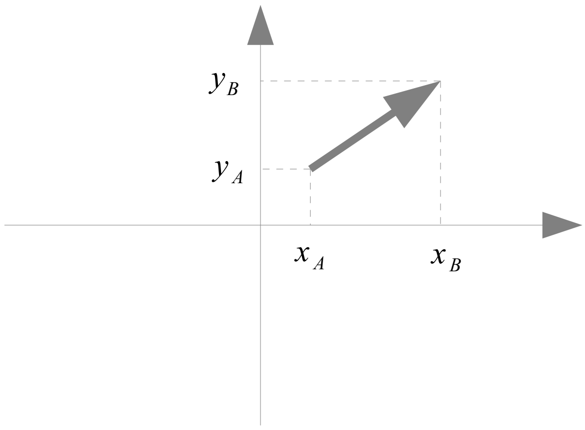
un punto appartiene al primo quadrante se $x_p > 0 \; e \; y_p > 0$

un punto appartiene al secondo quadrante se $x_p < 0 \; e \; y_p > 0$

un punto appartiene al terzo quadrante se $x_p < 0 \; e \; y_p < 0$

un punto appartiene al quarto quadrante se $x_p > 0 \; e \; y_p < 0$

In un piano cartesiano disegnamo un rappresentante del vettore $\bar{V}$.



L'inizio della "freccia" $\bar{V}$ sarà un punto $A(x_A, y_A)$ e la fine un punto $B(x_B, y_B)$

In questo modo <u>ad ogni **vettore** $\bar{V}$ corrisponde una **coppia di punti (A , B)**</u> dove A è l'inizio e B la punta della freccia . Per indicare questa corrispondenza useremo spesso la notazione alternativa

$$\bar{V} = \overline{AB} \qquad [3]$$

Questa relazione ci suggerisce di "rappresentare" $\bar{V}$ come coppia di numeri (V_x, V_y)

$$V_x = x_B - x_A \qquad V_y = y_B - y_A \qquad [4]$$

V_x è detta componente orizzontale e V_y componente verticale di $\bar{V}$.

Esempio.

Siano dati i punti A(2,5) , B(3,7) , C(0,-3) , D(-8,6)

Scrivere le componenti dei vettori $\bar{V} = \overline{AB}$ $\quad \bar{W} = \overline{BC}$ $\quad \bar{Z} = \overline{DC}$

$V_x = x_B - x_A = 3 - 2 = 1 \qquad V_y = y_B - y_A = 7 - 5 = 2$

$W_x = x_C - x_B = 0 - 3 = -3 \qquad W_y = y_C - y_B = -3 - 7 = -10$

$Z_x = x_C - x_D = 0 - (-8) = 8 \qquad Z_y = y_C - y_D = -3 - 6 = -9$

La rappresentazione di un vettore mediante le sue componenti ci permette di eseguire in modo algebrico i calcoli sui vettori evitando le costruzioni geometriche .

Assegnati due vettori $\bar{V}=\overline{AB}$ e $\bar{W}=\overline{AC}$ e calcolate le loro componenti

$V_x = x_B - x_A \qquad V_y = y_B - y_A$

$W_x = x_C - x_A \qquad W_y = y_C - y_A$

avremo le seguenti formule :

modulo di $\bar{V}$: $|\bar{V}|=\sqrt{V_x^2+v_y^2}$ [5a]

le componenti del vettore $\lambda|\bar{V}|$ (prodotto di $\bar{V}$ per lo scalare λ) : $(\lambda V_x, \lambda V_y)$ [5b]

le componenti del vettore somma $\bar{V}+\bar{W}$: (V_x+W_x, V_y+W_y) [5c]

il prodotto scalare $\langle \bar{V}, \bar{W} \rangle = V_x * W_x + V_y * W_y$ [5d]