ALGEBRA DELLE DERIVATE

Ipotesi . Siano f(x) e g(x) due funzioni reali che esistano in un intervallo (a,b) (a e b possono essere anche infiniti)
che $\forall\, x \in (a\,,b)$ abbiano derivata prima (in ogni punto esiste sia per f(x) che per g(x) una sola retta tangente)

Allora in (a,b)

Tesi . D [f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x)

D[f(x) * g(x)] = Df(x) * g(x) + f(x) * Dg(x)

$$D\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{Dg(x)}{g(x)^2}$$

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{Df(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot Dg(x)}{g(x)^2}$$

Dimostrazione (alla Leibniz) .

1. **derivata della somma**

La funzione S(x) = f(x) + g(x) è la funzione che ad ogni x di (a,b) è costruita sommando l'ordinata f (x) con l'ordinata g(x)
Esiste in (a,b) la derivata prima di f(x) : df(x) = f(x+dx) - f(x) = Df(x) * dx
Esiste in (a,b) la derivata prima di g(x) : dg(x) = g(x+dx) - g(x) = Dg(x) * dx

Quindi S(x+dx) = f(x+dx) + g(x+dx) e dS(x) = S(x+dx) - S(x) = [f(x+dx) +g(x+dx)] - [f(x) + g(x)] =
=[f(x+dx) -f(x)] +[g(x+dx) - g(x)] = { Df(x) + Dg(x) } * dx

da cui

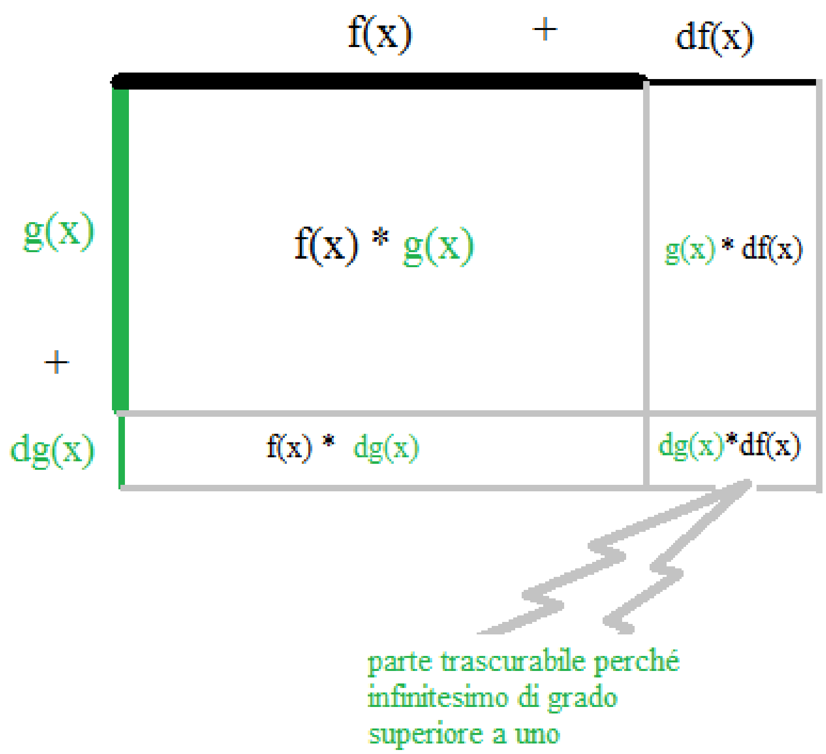
$$D[\,S(x)\,] = \frac{dS(x)}{dx} = Df(x) + Dg(x)$$

2. **derivata del prodotto**

La funzione P(x) = f(x) * g(x) è la funzione che ad ogni x di (a,b) è costruita moltiplicando l'ordinata f(x) con l'ordinata g(x)

Di conseguenza P(x+dx) = f(x+dx) * g(x+dx) = [f(x) + df(x)] *[g(x) + dg(x)]

La figura mette bene in risalto il risultato del prodotto



Di conseguenza avremo : P(x+dx) = f(x) * g(x) + [df(x) * g(x) + f(x) * dg(x)] = P(x) + [df(x) * g (x) + f(x) * dg(x)]

da cui tenendo presente la relazione P(x+dx) = P(x) + dP(x) segue

dP(x) = { g(x) * Df(x) + f(x) * Dg(x)} * dx da cui la tesi.

3. **derivata della funzione reciproca**

Se g(x) è una funzione la sua reciproca G(x)= 1/g(x) è la funzione che in ogni x ha per ordinata il reciproco dell'ordinata g(x).

Quindi per ogni x di (a,b) g(x) * G(x) = 1

Deriviamo tale uguaglianza :

a sinistra abbiamo G(x) * Dg(x) + g(x) * DG(x)
a destra abbiamo D 1 = 0 (come sappiamo la derivata di una costante è sempre zero)

Ricaviamo DG(x) dall'uguaglianza G(x) * Dg(x) + g(x) * DG(x) = 0

$$\frac{1}{g(x)} \cdot Dg(x) + g(x) \cdot DG(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$g(x) \cdot DG(x) = -\frac{Dg(x)}{g(x)} \cdot \Rightarrow DG(x) = -\frac{Dg(x)}{g(x)^2}$$

4. **derivata del quoziente**

La funzione quoziente $Q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ è la funzione che ad ogni x associa il quoziente tra l'ordinata di f(x) e quella di g(x).

La sua derivata segue applicando le regole 2 e 3 perché

$$DQ(x) = \mathrm{D}\left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = Df(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{Dg(x)}{g(x)^2} = \frac{Df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot Dg(x)}{g(x)^2}$$