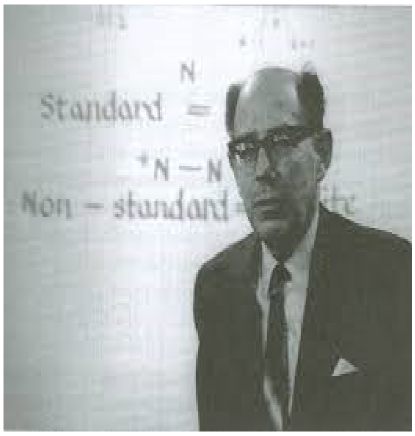
LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Kurt Gödel (1906 - 1978)



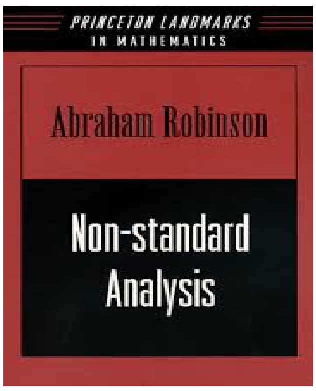
Abraham Robinson (1918 - 1974)

David Hilbert (1862 - 1943)

Euclide 325 a.c.

LA MATEMATICA DEI SISTEMI FORMALI
&

L'ANALISI NON-STANDARD



GLI ELEMENTI DI EUCLIDE

Nel 300 a.C. Euclide scrisse GLI ELEMENTI considerati la più importante esposizione della geometria dell'antichità.
L'opera inizia con la definizione di termini primitivi

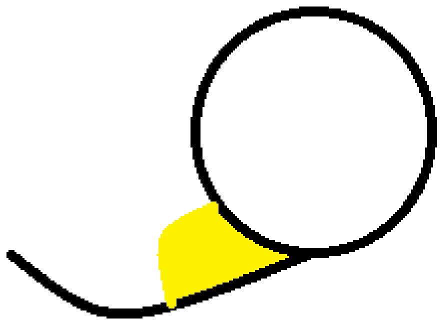
un punto è ciò che non ha parti

una linea è una lunghezza senza larghezza

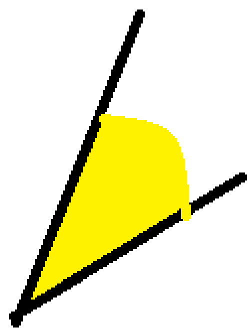
gli estremi di una linea sono punti

una retta è una linea che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa

un angolo (piano) è formato da due linee in un piano le quali si incontrino e non giacciano in linea retta. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette , l'angolo è detto rettilineo. ([1])



angolo piano



angolo rettilineo

Prosegue poi con il definire l'angolo retto : **Se una retta innalzata a partire da un'altra retta forma con essa angoli adiacenti uguali tra loro ,ciascuno dei due angoli è retto , e la retta si dice perpendicolare a quella su cui è innalzata.**

Per quanto riguarda le rette parallele , Euclide le definisce come rette giacenti nello stesso piano che , prolungate illimitatamente in entrambe le direzioni , non si incontrino fra loro da nessuna delle due parti ([2])

Successivamente passa a definire 10 assiomi: i primi cinque li chiama postulati e gli altri “nozioni comuni”. La differenza , che oggi non è più significativa, risiede nel fatto che i primi sono specificatamente geometrici mentre i secondi sono alla base anche di altre scienze.

I cinque assiomi

Postulato 1 E' possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad un altro punto

Postulato 2 E' possibile prolungare illimimitatamente una retta finita in una retta

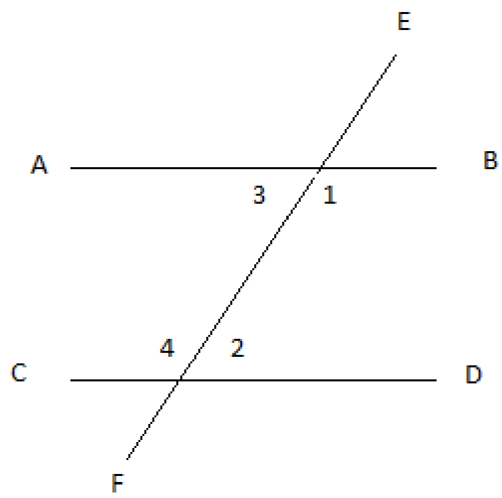
1 Gli angoli rettilinei sono quelli che usiamo normalmente , per cui parliamo semplicemente di angoli
2 Euclide quando diceva retta ,pensava a segmenti che andavano prolungati.

Postulato 3 E' possibile descrivere un cerchio con centro e raggio qualsiasi

Postulato 4 Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro ([3])

Postulato 5 Se in un piano una retta, intersecando altre due rette , forma con esse , da una medesima parte , angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti , allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.

Il disegno sottostante può essere d'aiuto .



EF è la retta in questione intersecante le rette AB e CD .Gli angoli di cui parla Euclide sono la coppia (1,2) o la coppia (3,4) . Il postulato afferma che se la somma degli angoli 1 e 2 è minore di due angoli retti allora le rette AB e CD si incontrano alla destra di EF.

Le cinque "nozioni comuni"

I. Cose uguali a un'altra medesima sono tra loro uguali
II. Se a cose uguali si aggiungono cose uguali , allora si ottengono cose uguali
III. Se da cose uguali si tolgono cose uguali ,allora si ottengono cose uguali
IV. Cose che possono essere portate a sovrapporsi l'una con l'altra sono uguali tra loro
V. Il tutto è maggiore della parte

Il 5° postulato per la lunghezza della formulazione e per quanto afferma non è certamente intuitivo. In effetti Euclide cercò di rinviarne l'uso il più possibile .

<u>Senza usare il 5° postulato è possibile dimostrare che :</u>

si può costruire un triangolo equilatero

si può riportare una distanza

3 Sembra una cosa ovvia ma così non è. Nessuno ci può assicurare che angoli retti distanti tra loro siano uguali. Euclide introduce questo postulato per dire che esiste su tutto il piano una misura fissa e universale con cui possiamo confrontare tutti gli altri angoli.In altre parole questo assioma ci assicura che il piano è uniforme.

è possibile bisecare un angolo o un segmento

gli angoli opposti al vertice sono uguali

ad angolo maggiore è opposto lato maggiore

la somma di due qualsiasi angoli interni ad un triangolo è minore di 180°

la somma di due lati in un triangolo è maggiore del terzo lato

valgono tutti e tre i criteri di congruenza Lato_Lato_Lato , Angolo_Lato_Angolo e Lato_Angolo_Lato

<u>Serve il 5° postulato per dimostrare che :</u>

rette parallele alla stessa retta sono parallele

l'angolo esterno di un triangolo è la somma dei due angoli interni non adiacenti

la somma degli angoli interni di un triangolo vale due angoli retti

i lati e gli angoli opposti di un parallelogramma sono uguali

triangoli e parallelogrammi con la stessa base e compresi tra rette parallele sono uguali

dato un segmento si può costruire un quadrato

in un triangolo rettangolo vale il Teorema di Pitagora

DOPO EUCLIDE ….. LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Fu Posidonio di Rodi (135 a.C.) il primo a manifestare dubbi sulla verità del 5° postulato e propose di sostituirlo nel modo seguente :

Si dicono parallele quelle rette che giacciono nello stesso piano e che , prolungate indefinitamente in entrambe le direzioni , mantengono la stessa distanza fra loro

e dimostrare poi il 5° postulato di Euclide come teorema.

Ora se è vero che se due rette , per quanto prolungate , sono equidistanti , allora non si incontrano mai

vi sono dubbi sull'affermazione : se due rette per quanto prolungate , non si incontrano mai , allora sono equidistanti (non si incontrano mai per quanto vediamo ma cosa possiamo dire nella parte di estensione non visibile (in senso potenziale) ?)

Per poco meno di duemila anni schiere di pensatori tentarono di dimostrare il quinto postulato introducendone un altro "più evidente " ma senza successo. In effetti si doveva sempre aggiungere qualche cosa che era dubbio quanto il 5°.

<u>Alcune proposte</u>

Rette parallele sono equidistanti

Esiste almeno una coppia di rette equidistanti

Rette che non sono equidistanti convergono in una direzione e divergono nell'altra

Esiste una coppia di triangoli simili e non congruenti

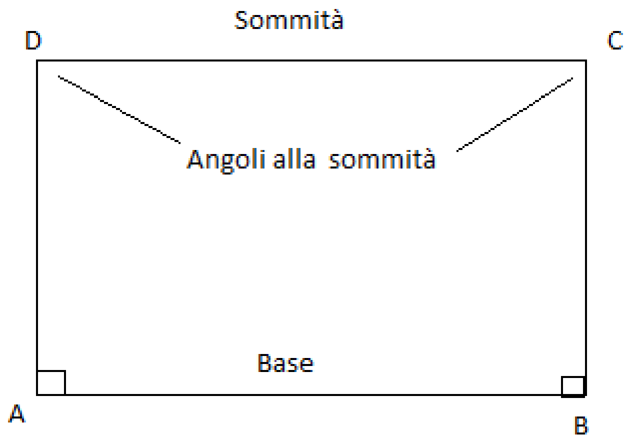
Data una retta r ed un punto P esterno <u>esiste una sola retta</u> per P parallela a r

Il matematico Gerolamo Saccheri (1667-1733) professore a Pavia scrisse un libro "Euclide liberato da ogni macchia " che rappresentò il più serio tentativo mai fatto fino ad allora di dimostrare il 5° postulato.

La figura principale su cui basò i suoi tentativi fu il quadrilatero di Saccheri (attenzione non pensatelo com un rettangolo)

DEFINIZIONE Un quadrilatero di Saccheri è un quadrilatero in cui due lati opposti sono uguali e hanno come perpendicolare comune uno degli altri lati. La perpendicolare comune è detta <u>base</u> il lato opposto è detto sommità e gli angoli adiacenti alla sommità sono detti <u>angoli alla sommità.</u>

DEFINIZIONE Dicesi rettangolo un quadrilatero con quattro angoli retti



quadrilatero di Saccheri

Egli partì dai 4 postulati di Euclide e tentò di dimostrare che gli angoli alla sommità del suo quadrilatero fossero retti.
In effetti è possibile provare che :

gli angoli alla sommità sono uguali
le retta che unisce il punto medio della sommità al punto medio della base è perpendicolare ad entrambe.

Dimostrare che gli angoli alla sommità (oltre ad essere uguali) sono retti ….. implica il 5° postulato.

Non riuscì mai a dimostrare il 5° postulato ma le sue ricerche stimolarono altri matematici

Nell'800 il problema fu affrontato in modo totalmente diverso.
Ai primi quattro postulati si aggiunse come quinto una negazione del 5° di Euclide nella speranza che questi assiomi conducessero a delle assurdità (contraddizioni)

Se come 5° postulato assumiamo la proposizione :

Data una retta r ed un punto P esterno esiste una sola retta per P parallela a r

due sono le possibili negazioni :

neg1 : Data una retta r ed un punto P esterno esistono almeno due rette per P parallele a r

neg2 : Data una retta r ed un punto P esterno non ci sono per P rette parallele ad r
In alternativa possiamo dire che due rette hanno sempre un punto in comune.

Con sorpresa ci si accorse che questi nuovi assiomi "davano origine" a sistemi geometrici non contraddittori , ossia a mondi con regole sorprendenti e paradossali ma logici.
Queste geometrie vennero considerate valide quanto quelle euclidea.

Una prima geometria venne creata indipendentemente da Bolyai e Lobacevskij utilizzando neg1. E' la **geometria iperbolica .**
In essa vale il teorema che afferma che in un triangolo la somma degli angoli interni è minore di un angolo retto.
Una conseguenza immediata (e sconcertante) di questo è che *se due triangoli hanno gli stessi angoli allora hanno la stessa area*
In tale geometria viene a mancare il concetto di figure simili e non è valido il teorema di Pitagora.

La seconda con neg2 venne formulata da Riemann ed è conosciuta come **geometria ellittica**

In questa geometria la somma degli angoli interni è maggiore di un angolo retto.

Nella seconda metà del XIX secolo le geometrie non euclidee cominciarono a diffondersi e il primo a proporre un modello di geometria iperbolica fu proposto dal matematico Beltrami nel 1868. Ma il più semplice (e conosciuto) di tali modelli è del 1902 ed è dovuto al genio del matematico,fisico e filosofo Henri Poincaré (1854-1912)

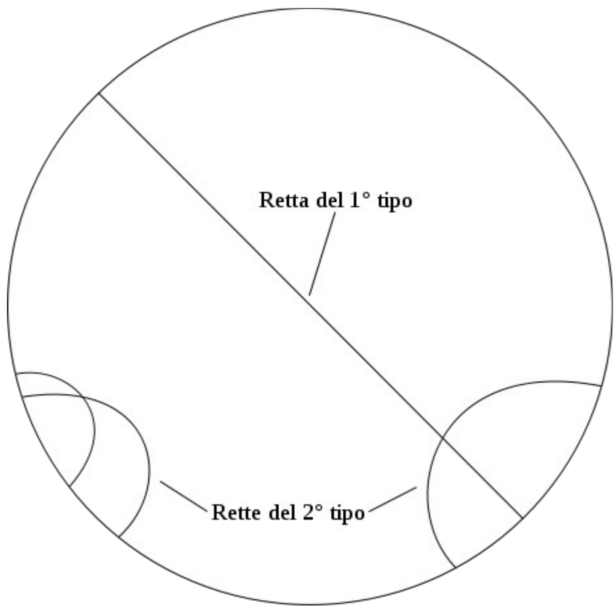
Il disco di Poincaré

Si inizia considerando un cerchio C di raggio R abbastanza grande da permettere che nel suo interno viva una popolazione di esseri bidimensionali . Li osserveremo restando al di fuori di C, come giganti un po' curiosi.
C è riempito di uno strano gas che provoca la contrazione dei campioni di lunghezza (regoli che misurano un metro quando sono posti al centro di C) via via che essi si allontanano dal centro.
Il fenomeno è descritto dalla formula

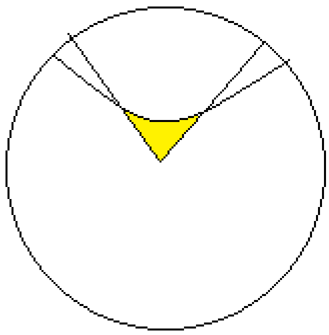
$$L = (\text{ lunghezza del regolo campione alla distanza r }) = 1-\frac{r^2}{R^2} \text{ m}$$

Al centro (r=0) L=1 , a metà strada (r=1/2 R) L= 0,75 , a tre quarti L=0,4375 ecc.

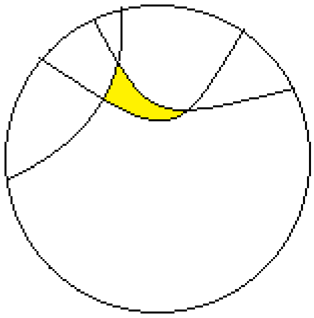
Supporremmo inoltre che ogni cosa all'interno di C (compresi gli abitanti) subiscano una corrispondente variazione delle dimensioni lineari , così da non accorgersi del fenomeno . Una persona alta 1,8 metri lo sarà sempre avvicinandosi verso la circonferenza di C.
Solo noi (esterni) vedremo il progressivo rimpicciolimento.
Inoltre gli "abitanti " di C non raggiungeranno mai la circonferenza limite di C ; per loro sarà l'infinito ([4])
Infine assegnamo allo strano gas una ulteriore proprietà : i raggi di luce che si propagano tra punti interni a C seguono il cammino più breve , misurato nel loro sistema dei regoli.
Che cosa sono le linee rette in questo mondo ?
Per gli abitanti di C sono i percorsi compiuti da un raggio di luce o equivalentemente il cammino più breve tra due punti.
Per noi osservatori esterni saranno : i diametri (privi dei loro estremi e dunque infiniti)
la parte interna a C dei cerchi ortogonali ([5])



Nel disco di Poincarè i triangoli si realizzano sempre con segmenti di retta e dunque potremmo averne (visti dall'esterno) diversi tipi come in figura :



triangolo segmento-segmento-arco

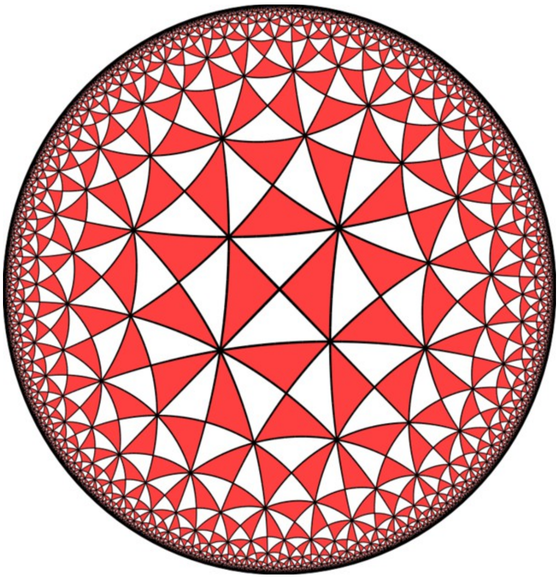


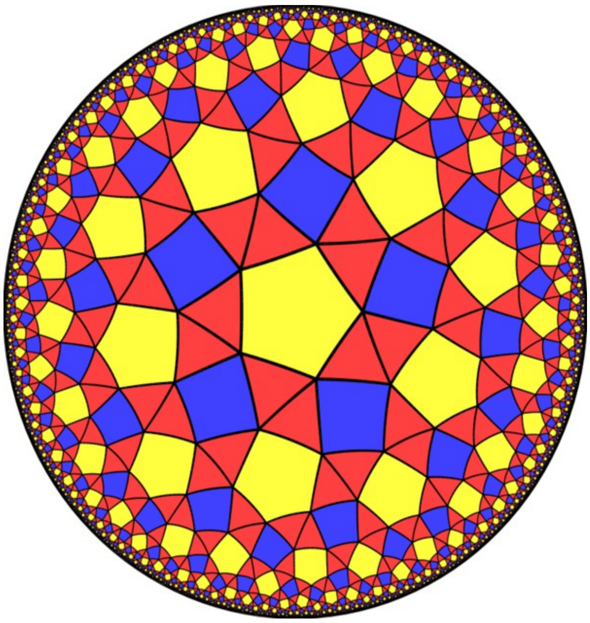
triangolo arco-arco-arco

Terminiamo questo viaggio nella geometria iperbolica attraverso alcune immagini di

4 Il cerchio verrà inteso dai suoi abitanti come un piano euclideo , essendo infinito in tutte le direzioni
5 Due cerchi sono ortogonali se nei punti di intersezione le rispettive tangenti sono perpendicolari

tassellazioni (riempimenti infiniti) del disco di Poincaré.



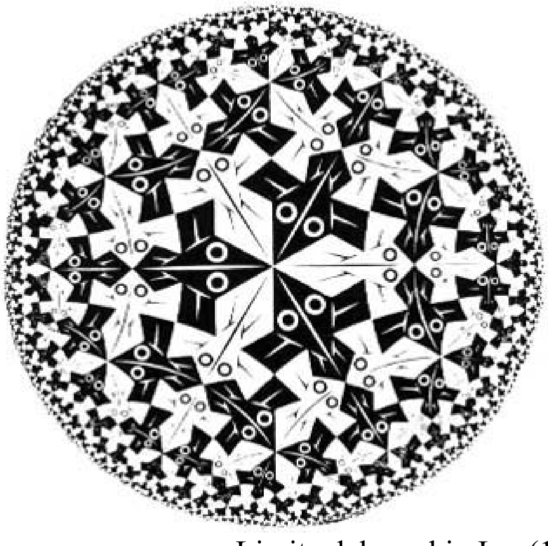


Tassellazione attraverso triangoli tutti uguali perchè aventi gli stessi angoli

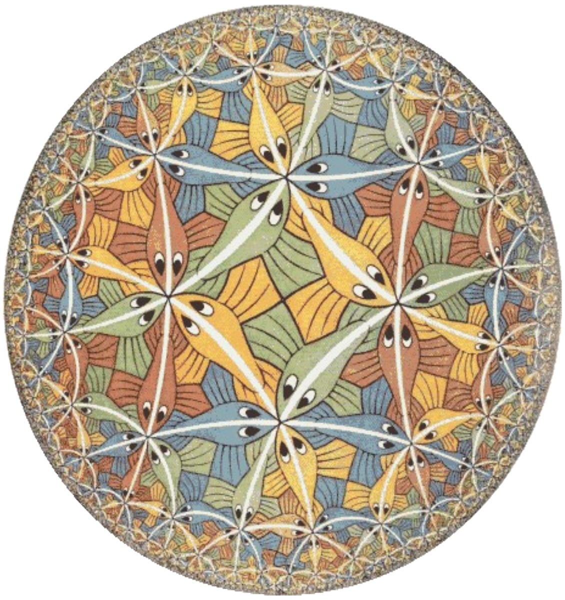
Altra tassellazione a due figure

….entra Escher e il disco di Poincaré si anima

Il pittore Escher conobbe il matematico Coxeter (1907-2003) nel 1954 ad Amsterdam al congresso mondiale di matematica, durante il quale si svolgeva la prima mostra importante dell'artista grafico olandese.Escher aveva scritto a Coxeter chiedendo spiegazioni sui modelli di geometria non euclidea iperbolica che aveva visto in un libro. Coxeter divenne amico di Escher e lo aiutò con suggerimenti e disegni. Escher realizzò con i suggerimenti di Coxeter xilografie del disco di Poincaré che chiamò Circle Limit , costruendo tassellazioni artistiche del mondo iperbolico:



Limite del cerchio I (1958)



limite del cerchio III   (1959)

Escher usa le rette (archi di cerchi ortogonali) per sezionare il mondo iperbolico che tassella poi con triangoli e quadrilateri.In tale reticolato (linee bianche) ripete un motivo di 6 pesci.I pesci sono di 4 colori per contrastare completamente da quelli che li circondano.

IL METODO ASSIOMATICO E SUA EVOLUZIONE NEI SISTEMI FORMALI

Il metodo assiomatico proposto per la prima volta da Euclide   in sostanza   considera :

gli assiomi come "fondamenta"   di un sistema
i teoremi come   "sovrastrutture "   e sono :
derivati direttamente dagli assiomi
derivati da assiomi   e alcuni teoremi

utilizzando esclusivamente i <u>principi della logica</u>

Nel 19° secolo la scoperta delle geometrie non euclidee   e la teoria degli insiemi portarono ad un diffuso convincimento che ogni settore della matematica potesse essere scritto a partire da una adeguata base di assiomi . Un esempio   è l'assiomatizzazione dell'aritmetica dei numeri naturali , sviluppata nel 1899 dal matematico cuneese Giuseppe Peano.

Ci sono tre termini "familiari" **numero** , **zero** e **successore immediato di**
e 5 assiomi :

1.zero è un numero

2.il successore immediato di un numero è un numero

3.lo zero non è il successore immediato di alcun numero

4.due numeri qualsiasi hanno un diverso successore immediato

5.ogni proprietà di cui gode lo zero e il successore immediato di ogni numero appartiene a tutti i numeri (principio di induzione matematica)

Da questi assiomi Peano costruì tutta l'aritmetica dei naturali con le operazioni di somma e prodotto.

Ci si chiese allora se fosse possibile costruire ogni parte della matematica in modo assiomatico. Se questo era vero allora la matematica è semplicemente la scienza che trae le conclusioni logicamente implicite in un qualsiasi insieme di assiomi/postulati.

Tutto questo ,sollevò un problema molto serio : **la coerenza di un sistema assiomatico**

Un sistema di assiomi è coerente se non è possibile dedurre un teorema contraddittorio (vero/falso contemporaneamente)

Come fare per dimostrare la coerenza ?

Il matematico David Hilbert rispose : " bisogna trovare un modello concreto su cui tradurre i postulati in affermazioni vere ed evidenti "

Esempio : per la geometria euclidea lo spazio ordinario
per la geometria riemanniana la sfera
per i numeri naturali la "retta " numerica
per i numeri complessi il piano bidimensionale

Il problema comune a tutti i sistemi assiomatici è che uno o più assiomi generano un insieme infinito di elementi e in questi insiemi si possono annidare delle contraddizioni chiamate "antinomie".

La più celebre di queste è l'antinomia di Bertand Russell sugli insiemi infiniti costruita nel 1902 sulla teoria ingenua degli insiemi di Cantor dove gli insiemi possono essere definiti in modo completamente libero : data una proprietà, essa identifica sempre un insieme.

Russel disse :

Pensiamo all'insieme di tutti gli oggetti che godono di una certa proprietà.
Allora possiamo suddividere gli insiemi in due categorie :

- Gli insiemi che tra i loro elementi hanno loro stessi, cioè gli insiemi che appartengono a sé stessi; si cita spesso come esempio "l'insieme di tutti i concetti astratti", che appartiene a sé stesso perché, a sua volta, è un concetto astratto.

- Gli insiemi che tra i loro elementi non hanno loro stessi, cioè gli insiemi che non appartengono a sé stessi; ad esempio, come notò Russell stesso, "l'insieme di tutte le tazze da tè" non è una tazza da tè.

Se definiamo *R* come l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi, *R* che insieme è?:

Supponendo che R vi appartenga (R è l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sestessi), si avrebbe che:

- R appartiene a sé stesso;
- Quindi R non soddisfa la definizione;
- Quindi R non è uno degli "insiemi che non appartengono a sé stessi";
- Quindi R non appartiene a sé stesso, il che contraddice il primo enunciato.

Anche supponendo che R *non* appartenga a sé stesso, si ha che:

- R non appartiene a sé stesso;
- Quindi R soddisfa la definizione;
- Quindi R è uno degli "insiemi che non appartengono a sé stessi";
- Quindi R è un insieme che appartiene a sé stesso, il che contraddice il primo enunciato.

In termini logici:

In sintesi, il paradosso di Russell si può enunciare così: *l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi appartiene a sé stesso se e solo se non appartiene a sé stesso*.

Per renderlo più comprensibile Russell suggerì la seguente formulazione :

« In un villaggio vi è un solo barbiere, un uomo ben sbarbato, che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. Il barbiere rade sé stesso?

IL PROGRAMMA DI HILBERT

Egli pensò di costruire dimostrazioni "assolute" mediante le quali la coerenza di un sistema avrebbe pouto essere dimostrata senza ricorrere alla coerenza di un altro sistema.

Per poter fare questo Hilbert propose la completa formalizzazione di un sistema deduttivo .
Si tratta di svuotare di ogni significato le espressioni di un sistema , le quali devono essere considerate come semplici segni. Occorre poi enunciare regole precise (gli assiomi) per sapere come combinare e manipolare questi segni.
Costruito un tale sistema i teoremi diventano "catene" di simboli senza significato , costruite secondo le regole date. La matematica doveva costruiva *sistemi formali* S che generalizzavano l'idea di sistemi assiomatici ideata da Euclide.
Una pagina piena di simboli "senza significato" di tale matematica formalizzata non afferma nulla.
Le affermazioni su un tale sistema S e sulle sue "catene" (teoremi) evidentemenet non appartengono ad S.
Hilbert chiamò **metamatematica** l'insieme di tali affermazioni (descrive dall'esterno la matematica)

Esempio

$2 + 3 = 5$ espressione che appartiene all'aritmetica

' $2 + 3 = 5$' è una formula aritmetica appartiene alla metamatematica *perché attribuisce significato a una catena di simboli aritmetici* altra affermazione che appartiene alla metamatetica

> se il segno '=' deve essere usato in una formula aritmetica , esso deve essere accompagnato , sia a destra che a sinistra , da espressioni numeriche.

Ancora $x = x$ $0 = 0$ sono formule matematiche

mentre *'x' è una variabile* è un'affermazione che appartiene alla metamatematica

altro elemento metamatematico è la frase

> la formula ' 0 = 0' è deducibile dalla formula 'x = x' sostituendo il numerale '0' al posto della variabile 'x'

Infine **appartiene** alla metamatematica **la domanda** *l'aritmetica è coerente ?*
In altre parole gli assiomi di Peano non produrranno mai una formula che è formalmente vera e falsa contemporaneamente ?
Hilbert comprese che i sistemi formali appartengono alla metamatematica ed era quest'ultima che andava studiata. Era convinto che esistessero in essa metodo finiti per dimostrare l'impossibilità di dedurre formule contraddittorie in un dato sistema formale matematico.

… ma arrivò KURT GŐDEL

Nel 1931 apparve il lavoro : *Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei Principia mathematica e di sistemi affini*

L'autore era il venticinquenne Kurt Gödel dell'Università di Vienna e né il titolo né il contenuto erano comprensibili per la maggior parte dei matematici. I Principia erano un testo sui fondamenti della matematica attraverso la logica scritto da B. Russell e N. Whitehead .
In questo lavoro egli dimostrò , operando sulla metamatematica, che ogni sistema formale che includa almeno l'aritmetica dei numeri naturali ha delle limitazioni date dal fatto che in esso esistono sempre proposizioni impossibili da dimostrare .
Tali proposizioni sono dette formalmente indecidibili e quindi nessun sistema assiomatico riesce a racchiudere interamente le conoscenze matematiche. Ogni sistema assiomatico è incompleto
Questo distrusse il programma formalista di Hilbert.
Tuttavia i risultati di Gödel hanno dato spunto a nuovi studi sulla logica e sulla teoria dei linguaggi formali.
Kurt Gödel con Alan Turing e John von Neumann hanno formulato le idee matematiche che hanno poi consentito la costruzione dei primi calcolatori elettronici.

UNA CONSEGUENZA DEI LAVORI DI GÖDEL : L'ANALISI NON STANDARD

Se i sistemi formali sono incompleti allora esistono più matematiche.
Infatti dato un sistema formale S che rappresenta certe conoscenze matematiche e una sua proposizione P indecidibile posso fare due scelte :

creare un nuovo sistema di assiomi formato da quelli che hanno creato S + P (assunto come nuovo assioma) creare un nuovo sistema di assiomi formato da quelli che hanno creato S + non- P (assunto come nuovo assioma)

Abbiamo quindi tre “insiemi di conoscenze matematiche “ ugualmente valide come sono valide le tre geometrie : euclidea , iperbolica ed elittica
Generalizzando possiamo avere più matematiche coerenti ma sempre contenenti proposizioni la cui verità o falsità è indimostrabile all'interno del sistema.

Sulla scia di queste idee il matematico Albert Thoralf Skolem costruisce un sistema formale A' in cui una sua parte A “somiglia e si comporta “ come i numeri naturali dell'insieme N.
Skolem chiamò A' aritmetica non standard e numeri soprannaturali i suoi elementi .
Ci sono numeri soprannaturali più grandi di qualsiasi numero naturale e se si considera il loro reciproco otteniamo un <u>numero più piccolo di ogni intero ma non nullo</u>

Nel 1960 il logico Abraham Robinson costruì un modello non standard dei numeri reali e dimostrò che i numeri più piccoli di ogni reale ma diversi da zero avevano le stesse proprietà aritmetiche degli infinitesimi di Leibniz.
Con questo il calcolo differenziale ideato da Leibniz è pienamente giustificato ed utilizzabile.
E' nata così l'Analisi non standard (NSA) che nel 1973 fu definita da Gödel l'Analisi del futuro.

Nell' NSA il metodo di Leibniz di calcolare la derivata viene così interpretato :

Sia f(x) una funzione di R in R.

Il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$ viene visto come una divisione

nell'insieme non-standard R' (che contiene numeri che somigliano ai numeri reali di R)

In particolare x_0+dx e dx sono numeri reali non-standard.

Tale rapporto incrementale fornisce un terzo numero reale non-standard della forma

$$f'(x_0)+k\,dx$$

Robinson definisce la derivata prima come la parte standard del rapporto incrementale

$$D(f)[x_0]=st(f'(x_0)+k\,dx)=f'(x_0)$$

In questo modo è possibile utilizzare “gli infinitesimi” dx , dy ed è giustificata la loro eliminazione .