MODELLI MATEMATICI IN BIOLOGIA

Thomas Robert Malthus (The Rookery, 13 febbraio 1766 – Bath, 29 dicembre 1834) è stato un economista e demografo inglese
Nel 1798 pubblicò **An essay of the principle of the population as it affects the future improvement of society** (Saggio sul principio della popolazione e i suoi effetti sullo sviluppo futuro della società), in cui sostenne che l'incremento demografico avrebbe spinto a coltivare terre sempre meno fertili con conseguente penuria di generi di sussistenza per giungere all'arresto dello sviluppo economico, poiché la popolazione tenderebbe a crescere in progressione geometrica, quindi più velocemente della disponibilità di alimenti, che crescono invece in progressione aritmetica (teoria questa che sarà poi ripresa da altri economisti per teorizzare l'esaurimento del carbone prima, e del petrolio dopo).
L'idea di Malthus della "Lotta per la sopravvivenza" dell'uomo ebbe una influenza decisiva sia su Charles Darwin che su Alfred Russel Wallace per la formulazione della loro teoria evoluzionista.

Nel trattato Malthus ipotizzò una popolazione :
omogenea (insieme di individui in cui sia trascurabile la loro età , il loro sesso e il loro ceto sociale)
isolata (non vi siano presenti fenomeni di immigrazione e emigrazione e habitat invariante)

La variazione nel tempo t del numero di individui di una tale popolazione sarà una funzione N(t) e la sua variazione sarà legata al numero delle nascite e al numero delle morti.

Tutto questo si traduce nell'equazione differenziale

$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t) - \beta N(t)$ dove α indica il numero di nascite e β il numero di morti nell'unità di tempo.

Ponendo $\gamma = \alpha - \beta$ (potenziale biologico della popolazione)

abbiamo

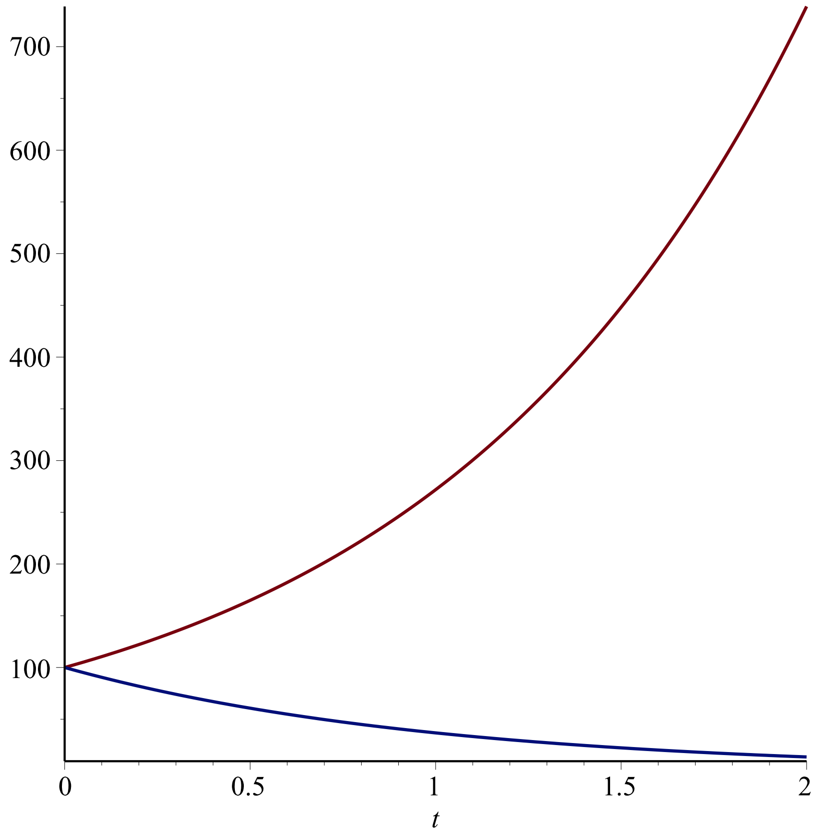
$$\frac{dN}{dt} = \gamma N(t) \qquad con \qquad N(0) = N_0 \qquad \text{(Problema di Cauchy)}$$

La soluzione dell'equazione differenziale è $N(t) = N_0\, e^{\gamma t}$ (crescita esponenziale della popolazione)

Esempio

$N_0 = 100$, $\gamma = \pm 1$

$with(plots)$:
$plot([100 \cdot \exp(1 \cdot t),\ 100 \cdot \exp(-1 \cdot t)],\ t = 0..2)$



Chiaramente se γ=0 il numero di individui della popolazione rimarrà costante
se γ >0 la popolazione crescerà indefinitamemte
se γ <0 la popolazione è destinata ad estinguersi

Per avere una stima del potenziale biologico della popolazione umana possiamo prendere i dati della popolazione nel 1960 (N= 3.04 * 10^9)
e nel 2000 (N= 6.07 * 10^9)

Allora $\gamma = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{N_{2000}}{N_{1960}}\right) = \frac{1}{40} \ln\left(\frac{6.07}{3.04}\right) \sim 0,017$

Con questo potenziale si avrebbe nel 2050 $eval\left(3.04 \cdot 10^9 \cdot \exp(0.017 \cdot 90)\right)$

$$1.403925754\ 10^{10} \qquad \textbf{(1)}$$

una popolazione umana di 14 miliardi di individui (una catastrofe tenuto conto delle risorse alimentari).

Questa stime evidenzia i limiti del modello di Malthus per la specie umana , tuttavia fornisce risultati accettabili per altre "popolazioni" :
datazione dei reperti fossili con il metodo del decadimento di nuclei radioattivi , determinazione della

velocità in alcune reazioni chimiche.

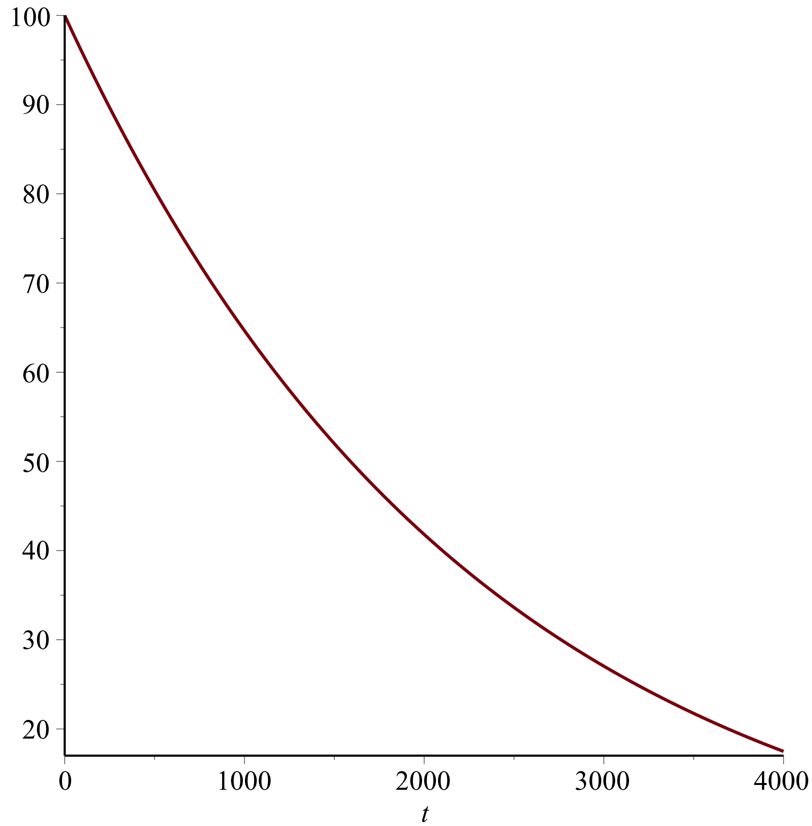
<u>Esempio 1. Decadimento radioattivo</u>

Il radio 226 ha un tempo di dimezzamento di 1590 anni . Se la massa iniziale $m_0 = 100\ g$

$$\left(\frac{dm}{dt}\right) = -K\,m \qquad con \quad m(0) = m_0 = 100\ g \qquad \Rightarrow \quad m(t) = m_0 \cdot e^{-K \cdot t}$$

Sapendo che $m(1590) = \frac{1}{2} m_0$ *possiamo ricavare* $K = 0,\ 000435942$

$plot(100 \cdot \exp(-0.000435942 \cdot t)\ ,\ t = 0\ ..4000)$



Esempio 2 . Evoluzione di una popolazione di protozoi

La popolazione iniziale è formata da due individui e il taso di sviluppo giornaliero è di 0.7944. Quanti protozoi ci saranno dopo 6 giorni ?

$eval(2 \cdot \exp(0.7944 \cdot 6))$

$$234.9909918 \quad (2)$$

circa 235 individui.

Esempio 3. Reazioni chimiche del 1° ordine

Alcuni esperimenti hanno mostrato che a 45° la reazione chimica $[N_2O_5] \Rightarrow 2\,NO_2 + \frac{1}{2}O_2$ avviene con una velocità data dalla legge

$$\frac{d[N_2O_5]}{dt} = -\ 0.0005[N_2O_5]$$

Allora al tempo t (secondi) a partire da una concentrazione iniziale
C_0 *avremo* $[N_2O_5] = C_0 \cdot e^{-0.0005 \cdot t}$

Nel 1846 il matematico belga Verhulst propose un modello matematico per popolazioni biologiche sotto **effetto logistico**

In quegli anni i biologi avevano osservato che l'ipotesi di habitat invariante era poco probabile e che ad alte densità in una popolazione il tasso di mortalità tende ad aumentare e diminuisce significativamente la fertilità. Questo è ciò che si intende per effetto logistico.

Egli suppose che il potenziale biologico γ^* non fosse costante ma dipendesse dal numero degli individui secondo la relazioni

$$\alpha^* = \alpha - \alpha_1 \cdot N \qquad \beta^* = \beta - \beta_1 \cdot N \qquad \gamma^* = \gamma\left(1 - \frac{N}{k}\right)$$

γ è detto potenziale intrinseco della specie

e $k = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$ capacità portante dell'ambiente.

Il problema di Cauchy diventa

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right) \cdot N(t) \qquad con\ \ N(0) = N_0$$

La soluzione avviene per variabili separabili

$$\frac{dN}{dt} = -\gamma\left(\frac{N^2 - Nk}{k}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{k}{N^2 - Nk}dN = -\gamma\, dt \qquad e\ \ integrando\ \ abbiamo \quad \int \frac{k}{N(N-k)}\, \mathrm{d}N = \int -\gamma$$

$\mathrm{d}t$

La soluzione è in forma logaritmica

$$-\ln N + \ln(N - k) = -\gamma t + c \qquad e\ \textbf{in}\ forma\ \ esponenziale \quad \frac{N-k}{N} = C\ e^{-\gamma \cdot t}$$

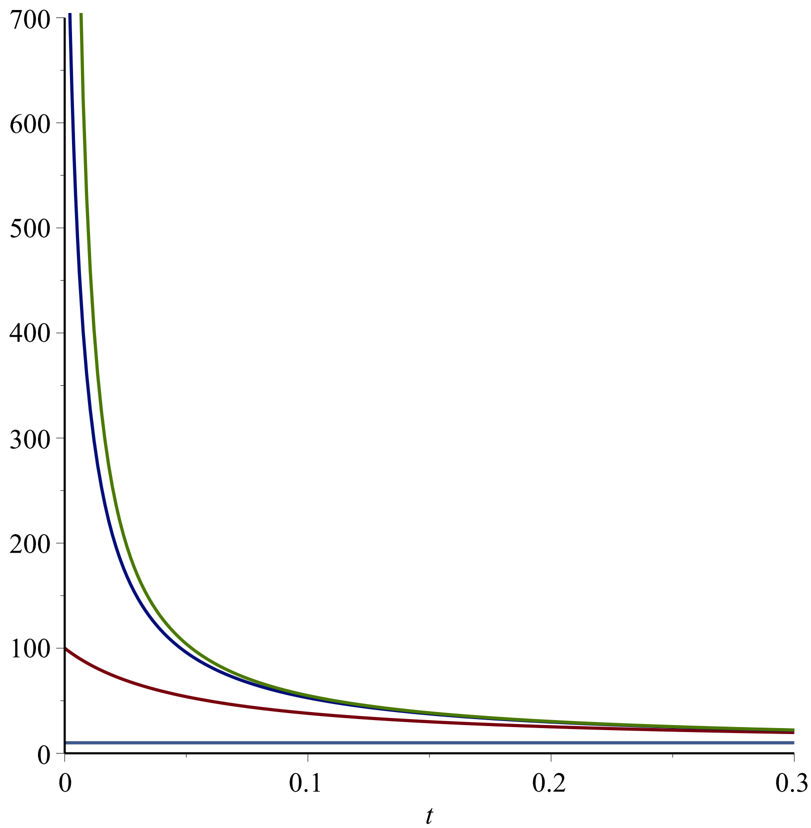
Inserendo la condizione
$N(t=0) = N_0$ *e risolvendo rispetto a* N *otteniamo la* ***soluzione generale dell'equazione logistica*** :

$$N(t) = \frac{k \cdot N_0}{N_0 + (k - N_0) \cdot e^{-\gamma \cdot t}}$$

Si dimostra che qualunque sia N_0 se la capacità portante k è positiva le soluzioni sono tutte asintotiche alla retta y = k come si osserva in figura

$$with(plots):$$

$$plot\left(\left[\frac{10 \cdot 100}{100 + (10 - 100) \cdot \exp(-2 \cdot t)}, \frac{10 \cdot 1000}{1000 + (10 - 1000) \cdot \exp(-2 \cdot t)}, \frac{10 \cdot 10000}{10000 + (10 - 10000) \cdot \exp(-2 \cdot t)}, 10\right], t = 0..0.3\right)$$



Se $\gamma > 0$ e

$N_0 < \frac{k}{2}$ la curva assume la forma detta di sigmoide logistica tipica in alcune culture di batteri (es . Paramecium caudatum)

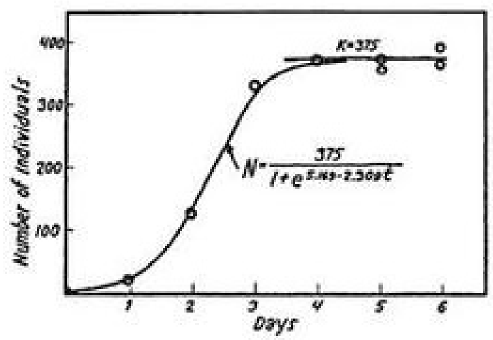


Figura 10.6: Esperimenti di Gause su di una popolazione di Paramecium caudatum.

In figura si osserva l'evoluzione di una cultura di batteri per 7 giorni . Il grafico della sigmoide è confrontato con i risultati sperimentali (cerchiolini)

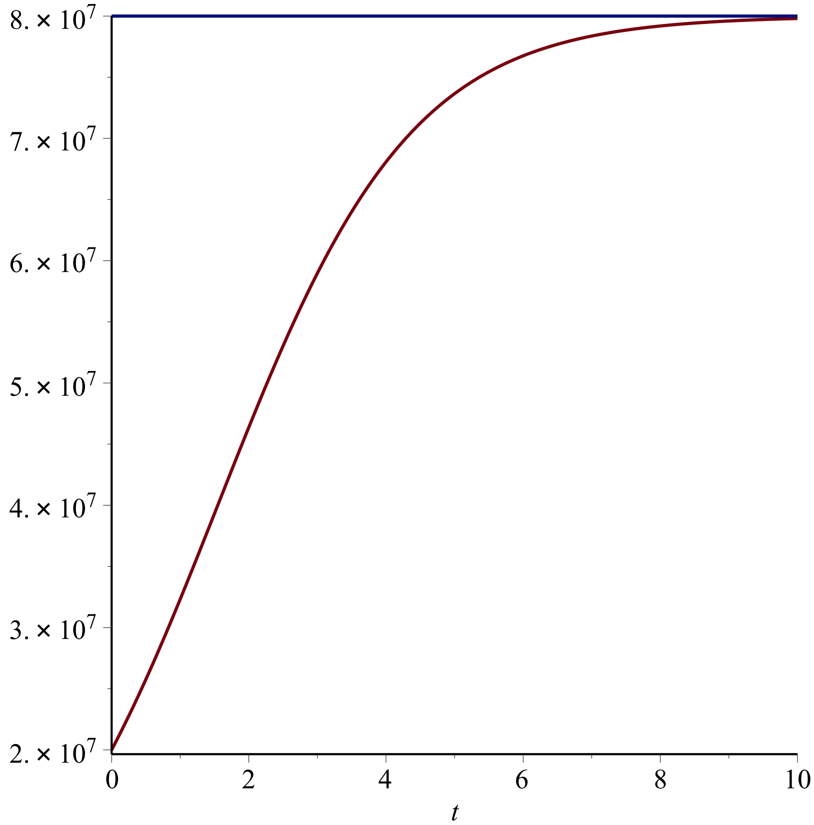
Esempio di sigmoide logistica in una popolazione animale: la biomassa dei pesci ippoglossi del pacifico

Sono pesci molto nutrienti che vengono pescati nell'Oceano Pacifico.
Detta m(t) la loro biomassa misurata in kg al tempo t (anni)
Attraverso dati sperimentali si è dedotto che la capacità portante è
$k = 8 \cdot 10^7$ *kg* e *il potenziale biologico intrinseco* $\gamma = 0.71$

Se la biomassa iniziale $m_0 = 2 \cdot 10^7 kg$ la variazione in anni sarà :

$$m(t) = \frac{8 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^7 + (8 \cdot 10^7 - 2 \cdot 10^7) \cdot e^{-0.71 \cdot t}} = \frac{16 \cdot 10^7}{2 + 6 \cdot e^{-0.71 \cdot t}}$$

$$plot\left(\left[\frac{16 \cdot 10^7}{2 + 6 \cdot \exp(-0.71 \cdot t)}, 8 \cdot 10^7\right], t = 0 ..10\right)$$



Esempio di sigmoide logistica in una popolazione vegetale : la biomassa delle foglie del castagno europeo (Castanea Sativa)

Osservando la crescita (in mm_quadri) delle foglie ogni 3 giorni si è ottenuta la tabella

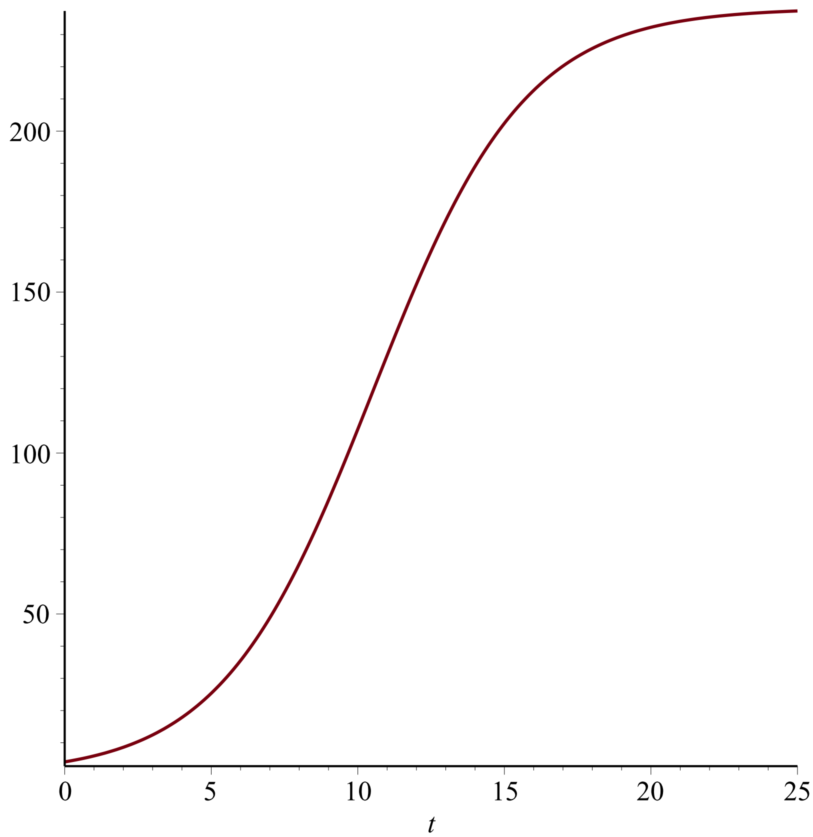
$$\left[\begin{array}{cccccccccc} t & 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 \\ B(t) & 4.05 & 12.87 & 47.28 & 82.37 & 143.94 & 192.54 & 222.3 & 234.4 & 237.3 \end{array}\right]$$ che ha fornito i valori

$\gamma = 0.386$ e $k = 238.214$

L'equazione di B(t) sarà

$$B(t) = \frac{4.05 \cdot 238.214}{4.05 + 234.16 \cdot \exp(-0.386 \cdot t)}$$

$$plot\left(\frac{4.05 \cdot 238.214}{4.05 + 234.16 \cdot \exp(-0.386 \cdot t)}, t = 0..25\right)$$



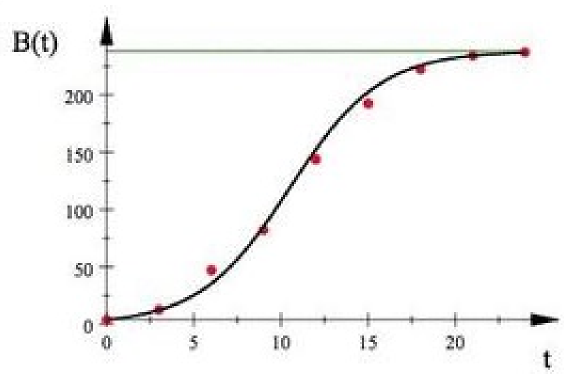


Figura 10.8: Crescita di biomassa per le foglie di castanea sativa e confronto con i dati sperimentali.