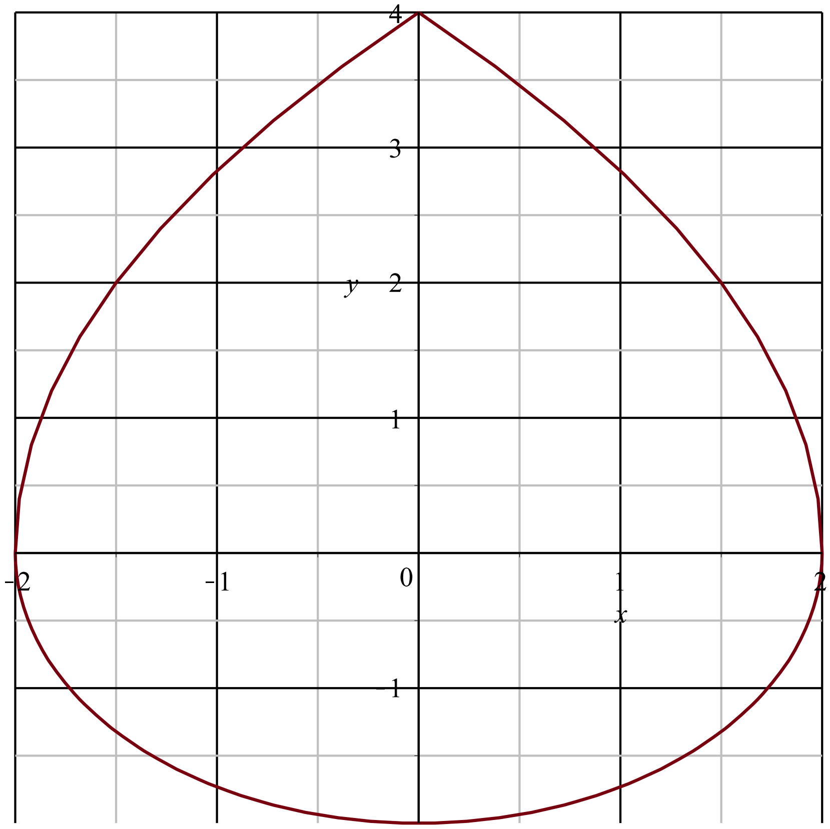
Una lezione diversa

Durante l'intervallo in una giornata piovosa, iniziate ad osservare fuori la finestra. Entra il docente e sorridendo vi informa che la lezione odierna si svilupperà intorno al fenomeno atmosferico che ha tanto attirato la vostra attenzione. In primis, occorrono dei dati e vi chiede di misurare le dimensioni di una goccia sul vetro della finestra.
Divertiti effettuate più misure e annotate il valore medio dell'altezza e della parte più larga della goccia.
Dalle rilevazioni stabilite che mediamente le gocce hanno larghezza 4 mm e altezza 6 mm.
Rappresentata la goccia su un sistema di assi coordinati, come in figura,



1. Dire quale, tra le seguenti proposte, modellizza la funzione rappresentata da tale grafico.

1. $y := \begin{cases} -\sqrt{4-x^2} \\ +\sqrt{2-|x|} \end{cases}$

$$2.\ y := \begin{cases} -\sqrt{4-x^2} \\ +\sqrt{16-8\cdot|x|} \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} x^2+y^2-2=0 & -2 \le y < 0 \\ |8\cdot x|+y^2-16=0 & 0 \le y \le 4 \end{cases}$$

2. Sapendo che la densità dell'acqua è circa 1 kg/m^3, potete calcolare la massa della goccia?

3. Il docente si allontana dalla classe e ritorna portando un recipiente cilindrico, di diametro 8 cm, due studenti si recano in cortile ove posizionano il recipiente e raccolgono la pioggia caduta in 2 minuti. Al ritorno misurate che la quantità di pioggia raccolta raggiunge un'altezza h=0,6 cm dal fondo del recipiente.

Quanta pioggia è caduta nell'unità di tempo? Quante gocce sono cadute nell'unità di tempo?

4. Poichè la goccia cade verticalmente sotto l'azione della forza di gravità con l'aria che oppone resistenza, il modello matematico che descrive la caduta della goccia di pioggia è my''=mg-hy' dove h>0 è un coefficiente di attrito.

Determinare la velocità di caduta di ciascuna goccia v(t)=y'(t) sia per tempi lunghi che per tempi brevi.

soluzione

soluzione punto 1

1. *è da scartare, basta verificare che la parabola non passa per il punto* $(0, 4)$ *della parabola*

3. *la circonferenza ha raggio* $\sqrt{2}$ *e non* 2

$$2.\ y := \begin{cases} -\sqrt{4-x^2} \\ \sqrt{16-8\cdot|x|} \end{cases} \quad \text{ok}$$

Dal grafico si evince che per $-2 \le y \le 0$ la funzione è una semicirconferenza di raggio 2 e centro nell'origine

$x^2+y^2=4$

$$x^2+y^2=4 \tag{1.1.1}$$

e per $0 \le y \le 4$

$|x| = -\frac{1}{8}y^2+2$

$$|x| = -\frac{1}{8}y^2+2 \tag{1.1.2}$$

soluzione punto 2

occorre calcolare il volume della goccia che risulta attaccata alla superficie del vetro, pertanto il solido ha come sezioni delle semi circonferenze. Il Volume della parte contenuta nel semipiano negativo delle ordinate ha volume V1

$$V1 := \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{0} (4 - y^2)\, dy$$

$$\frac{8}{3}\pi \quad \textbf{(1.2.1)}$$

$$V2 := \pi\int_{0}^{4} \left(-\frac{1}{8}\cdot y^2 + 2\right) dy$$

$$\frac{16}{3}\pi \quad \textbf{(1.2.2)}$$

$$Vtot := V1 + V2$$

$$8\pi \quad \textbf{(1.2.3)}$$

L'unità di misura del volume è in mm^3 *pertanto*

$$mm^3\ pertanto \quad \textbf{(1.2.4)}$$

$$la\ densità = \frac{10^3 g}{10^9 mm^3} = 10^{-6}\frac{g}{mm^3}$$

$$la\ densità = \frac{1}{1000000}\ \frac{g}{mm^3} \quad \textbf{(1.2.5)}$$

$$poiche'\ \mathrm{D} = \frac{m}{V}\ e\ quindi\ m = \mathrm{D}\cdot V$$

$$m := 10^{-6}\cdot\pi\cdot 8$$

$$\frac{1}{125000}\pi \quad \textbf{(1.2.6)}$$

espressa in grammi

soluzione 3

calcolo tutto **in** mm^3

$$VolumeRaccolto := \pi\cdot(4\cdot 10)^2\cdot 6$$

$$9600\pi \quad \textbf{(1.3.1)}$$

$$Pioggiaalsec := \frac{VolumeRaccolto}{120}$$

$$80\pi \quad \textbf{(1.3.2)}$$

$$Numerodigocce := \frac{Pioggiaalsec}{Vtot}$$

$$10 \quad \textbf{(1.3.3)}$$

soluzione 4

y''=g-$\frac{h}{m}$ y'

posto v(t)=y'(t) e sapendo che la goccia cade a partire dalla quiete ossia v(0)=0

v'=g-$\frac{h}{m}$ v risolvendo

$$A(x) := \int -\frac{h}{m}\, dt$$

$$x \rightarrow \int \left(-\frac{h}{m}\right) dt \qquad \textbf{(1.4.1)}$$

$$v(t) := e^{-\frac{h \cdot t}{m}} \cdot \int e^{\frac{h \cdot t}{m}} \cdot g\, dt$$

$$t \rightarrow e^{-\frac{h\,t}{m}} \left(\int e^{\frac{h\,t}{m}}\, g\, dt\right) \qquad \textbf{(1.4.2)}$$

$$v(t) := \frac{e^{-\frac{h \cdot t}{m}} \cdot g \cdot m}{h} \cdot \int e^{\frac{h \cdot t}{m}}\, dh \cdot \frac{t}{m} = \frac{m \cdot g}{h} + c \cdot e^{-\frac{h \cdot t}{m}}$$

poichè v(0):=0

$$c := -\frac{m \cdot g}{h}$$

$$v(t) := \frac{m \cdot g}{h} + \left(-\frac{m \cdot g}{h}\right) \cdot e^{-\frac{h \cdot t}{m}}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{m \cdot g}{h}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{m\, g}{h} \qquad \textbf{(1.4.3)}$$

Per tempi brevi:
il corpo cade a partire dalla quiete, nei primi istanti la velocità è bassa e l'attrito, poichè è proporzionale alla velocità, risulterà trascurabile. Per cui, per tempi brevi, la velocità v(t)=v(0)+g*t =gt