VERSO L'ESAME

Risolvi uno dei due problemi e rispondi a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMI

1 In una località sull'Oceano Atlantico la marea ha una notevole escursione e per questo è importante prevederne l'andamento. In prima approssimazione si è visto che il livello del mare può essere descritto dalla seguente funzione del tempo t:

$$h(t) = A - A\cos\left[\frac{\pi}{6}(t-b)\right], \quad \text{con } A, b \in \mathbb{R}^+.$$

a) Esprimendo t in ore e h in metri, determina i valori dei parametri A e b in modo che valgano contemporaneamente le seguenti condizioni:

- l'escursione tra il livello minimo e quello massimo sia di 8,0 m;
- si abbia il livello massimo per $t = 8{,}0$ ore (si scelga il minor valore positivo possibile per b).

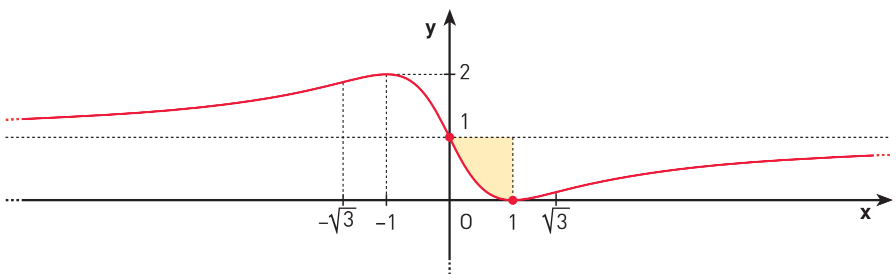
b) Verificato che si ha $A = 4$ e $b = 2$, traccia il grafico della funzione h così determinata. Determina poi in che istanti nel corso delle prime ventiquattro ore a partire da $t = 0$ la variazione del livello è più rapida (sia in crescita sia in diminuzione) e quanto vale in tali istanti la velocità di variazione.

c) Calcola la velocità di variazione del livello del mare all'istante $t = 4$ ore. Supponendo che nelle due ore successive la velocità di innalzamento delle acque sia costante e pari al valore appena determinato, stima il livello del mare all'istante $t = 6$ ore. Che interpretazione geometrica si può dare di questo procedimento?

d) Un turista, meravigliato da una marea che sale così rapidamente, ne misura costantemente la velocità a partire da $t = 15$ ore e osserva preoccupato che tale velocità aumenta continuamente. A che istante potrà rilassarsi rilevando che la velocità comincia a diminuire? Che cosa rappresenta questo istante per il grafico di $h(t)$?

e) Supponi di installare sul livello del mare, in verticale, un tubo cavo della sezione di 1 m^2, in modo che l'acqua possa risalirvi all'interno durante l'aumento di marea. Assunto come 0 il livello dell'acqua nel tubo all'istante di bassa marea, calcola il volume medio di acqua contenuta nel tubo nell'intervallo di tempo [2; 8].

2 La funzione g, continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, ha il grafico Γ riportato in figura, simmetrico rispetto al punto di coordinate (0; 1). La retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale per la funzione e uno dei flessi di Γ ha ascissa $x = \sqrt{3}$. Inoltre, l'area della regione evidenziata vale $A = \ln 2$.



a) Indicata con G la funzione integrale $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, determina $G(0)$, $G(1)$ e $G(-1)$.

b) Deduci da Γ l'andamento del grafico di G e scrivi le equazioni delle rette tangenti a quest'ultimo nei punti di ascissa $x = 1$ e $x = -1$.

c) Se come punto iniziale della funzione integrale fosse stata considerata l'ascissa 1 anziché l'ascissa 0, come sarebbe cambiato il grafico di G? Determina, in funzione di $G(x)$, l'equazione della funzione integrale $H(x) = \int_1^x g(t)\,dt$.

d) Dimostra che $g'(x)$, la funzione derivata di $g(x)$, è una funzione pari e traccia il suo andamento.

e) Sapendo che $g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$, calcola l'area della regione piana delimitata da Γ dalla curva di equazione $y = g'(x)$ nell'intervallo $[-2; 1]$.

QUESTIONARIO

1 Una pallina si muove in linea retta con velocità istantanea $v(t) = 32k - 4t^3$, dove k è un parametro reale positivo, t è il tempo espresso in secondi e v è misurata in metri al secondo. Sapendo che nell'istante iniziale ($t = 0$) la pallina si trovava in $x = 1$ m, quanto deve valere k affinché la pallina raggiunga l'ascissa massima di 4 metri?

2 Il paradosso della scimmia, noto come paradosso di Borel, dal nome del matematico francese che lo formulò, può essere enunciato come segue: una scimmia che digiti a caso su una tastiera riuscirà prima o poi a scrivere la Divina Commedia:

Nel mezzo del cammin di nostra vita...

Immaginando di digitare a caso tre lettere su una tastiera composta dalle sole 26 lettere dell'alfabeto, calcola:

a) la probabilità di comporre la parola «NEL»;

b) la probabilità di comporre «NEL» per la prima volta al quinto tentativo;

c) quante volte occorre ripetere l'esperimento affinché la probabilità di scrivere «NEL» almeno una volta sia superiore al 90%;

d) qual è la probabilità che in 26^3 tentativi si scriva «NEL» almeno due volte usando la distribuzione di Poisson.

3 Nel riferimento cartesiano $Oxyz$ sono dati i punti $A(2; -2; 1)$, $B(6; 0; -3)$ e $V(2; 4; 4)$.

a) Verifica che il triangolo OAB è rettangolo e calcolane l'area.

b) Calcola il volume del tetraedro $OABV$.

4 La distribuzione delle altezze (espresse in centimetri) di un gruppo di ragazzi è descritta con buona approssimazione dalla funzione $f(h) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(h-170)^2}{200}}$. Qual è la probabilità che l'altezza di un ragazzo scelto a caso nel gruppo sia maggiore di 180 cm? (*Suggerimento*. Consulta la tavola di Sheppard a pag. 12)

5 La dispersione di calore di una borsa frigo termica dipende da vari fattori, uno dei quali è la sua superficie totale. Supponendo di voler produrre borse termiche della capacità di 27 litri a forma di parallelepipedo di dimensioni a, $2a$ e b, determinane le dimensioni in millimetri in modo da minimizzarne la superficie.

6 Si sa che in una trasformazione isoterma di un gas ideale il prodotto $p \cdot V$ di pressione e volume rimane costante. Inoltre, il lavoro termodinamico è dato dall'area sottesa alla curva che descrive la trasformazione nel piano p-V. Determina il lavoro compiuto da un gas ideale che si espande a temperatura costante dallo stato iniziale $p_A = 2 \cdot 10^5$ Pa e $V_A = 5\ \text{m}^3$ al volume finale $V_B = 20\ \text{m}^3$.

7 Determina l'altezza del cono circolare retto di volume minimo circoscritto a una sfera di raggio 1.

8 Data la funzione $y(x) = \log_2 x$, determina l'equazione della retta tangente al suo grafico condotta dal punto di coordinate (0; 1). Disegna anche il grafico della funzione e la tangente.

9 Determina il parametro reale h in modo che il seguente limite abbia il valore assegnato:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - h}{e^x \ln x} = \frac{2}{e}.$$

10 Data la curva di equazione $y = x \cdot e^{x^3}$, considera la regione finita del piano cartesiano delimitata dalla curva, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $x = -1$. Calcola il volume del solido generato da tale regione nella rotazione completa attorno all'asse x.

RISOLUZIONE DEI PROBLEMI

1 **a)** Al variare di t, la funzione $y = \cos\left[\frac{\pi}{6}(t-b)\right]$ assume valori compresi fra -1 e 1, quindi il livello del mare h assume valori compresi fra $h_{\min} = A - A = 0$ e $h_{\max} = A + A = 2A$.

L'escursione fra i due livelli vale $2A$ e, affinché questa sia pari a 8, deve essere $A = 4$ (metri).

Il livello massimo si ha quando il coseno vale -1; se questo si verifica per $t = 8$, allora deve essere:

$$\cos\left[\frac{\pi}{6}(8-b)\right] = -1 \;\rightarrow\; \frac{\pi}{6}(8-b) = \pi + 2k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \;\rightarrow\; 8 - b = 6 + 12k \;\rightarrow$$

$$b = 2 - 12k.$$

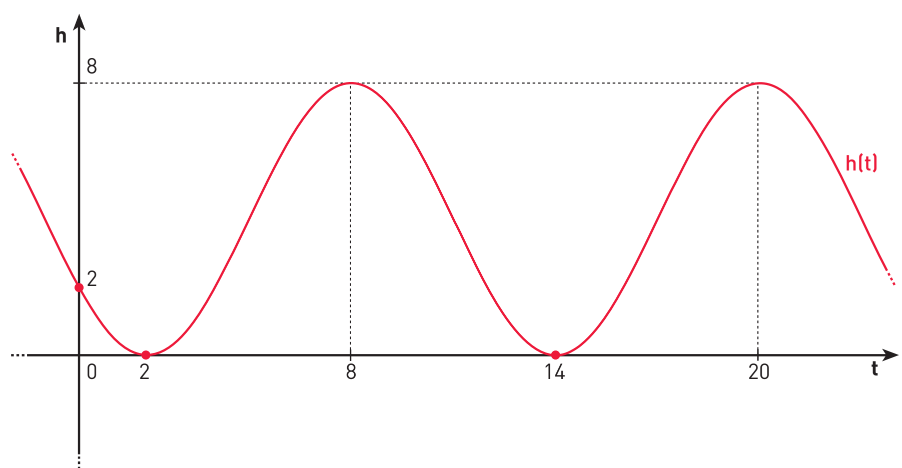
La più piccola soluzione positiva si ha per $k = 0$ ed è $b = 2$.

La corrispondente funzione $h(t)$, per i valori trovati, è:

$$h(t) = 4 - 4\cos\left[\frac{\pi}{6}(t-2)\right] = 4 - 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right).$$

b) Si tratta di una funzione cosinusoidale traslata a destra lungo l'asse x di 2 unità, di periodo $2\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 12$, dilatata lungo l'asse y di -4 e traslata lungo l'asse y di 4 unità.

Tracciamo il suo grafico.



La velocità di variazione di $h(t)$ è data, in ogni istante, dalla sua derivata prima:

$$h'(t) = \frac{2}{3}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right).$$

La velocità raggiunge il valore massimo (pari a $\frac{2}{3}\pi \simeq 2{,}09$ km/h) quando il seno vale 1, quindi per:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \rightarrow \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \rightarrow t = 5 + 12k \rightarrow t_1 = 5 \vee t_2 = 17.$$

La velocità raggiunge invece il valore minimo (pari a $-\frac{2}{3}\pi \simeq -2{,}09$ km/h) quando il seno vale -1, quindi per:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \rightarrow \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \rightarrow t = -1 + 12k \rightarrow t_1 = 11 \vee t_2 = 23.$$

c) All'istante $t = 4$ ore il mare ha raggiunto il livello (in metri):

$$h(4) = 4 - 4\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 4 - \frac{\pi}{3}\right) = 2,$$

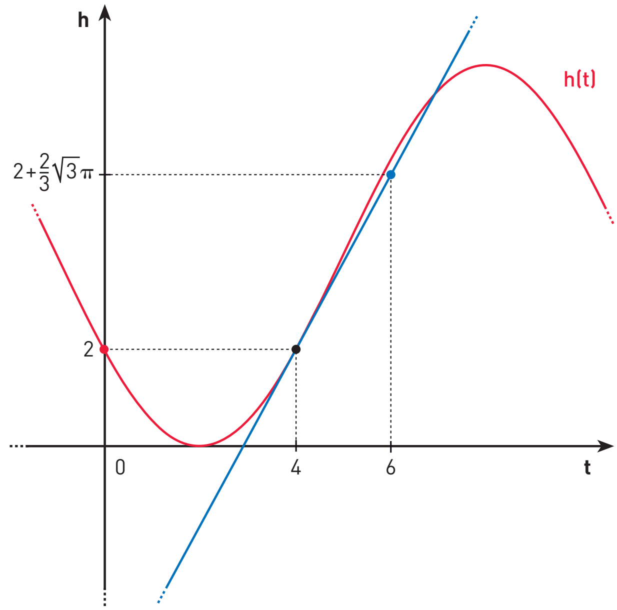
con una velocità di innalzamento (espressa in metri all'ora) pari a:

$$h'(4) = \frac{2}{3}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 4 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

Se tale velocità di innalzamento rimanesse costante, dopo due ore il mare raggiungerebbe il livello:

$$y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \cdot 2 \simeq 5{,}63.$$

Questo metodo equivale ad approssimare la funzione $h(t)$, nell'intervallo $[4; 6]$, con la retta tangente al grafico di $h(t)$ nel punto di ascissa 4.



d) La velocità di innalzamento massima, successiva alle ore 15, si ha alle ore 17 e vale $h'(17) = \frac{2}{3}\pi$ (metri/ora), poi inizia a diminuire. In corrispondenza di $t = 17$ il gafico presenta un punto di flesso, infatti:

$$h''(t) = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right) \to h''(17) = \frac{1}{9}\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 17 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{9}\pi^2\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0.$$

e) Il volume di acqua all'interno del tubo, in ogni istante t, è dato da $S \cdot h(t)$, dove S è la sezione unitaria ($1\ \text{m}^2$) del tubo. Il volume medio di acqua contenuta nel tubo è quindi data da:

$$V_{\text{medio}} = \frac{1}{t_{\max} - t_{\min}} \cdot \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} S \cdot h(t)\,dt = \frac{1}{8-2} \cdot \int_2^8 \left[4 - 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left[4t - \frac{24}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right)\right]_2^8 = \frac{1}{6}\cdot\left[32 - \frac{24}{\pi}\sin\left(\frac{8\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) - 8 + \frac{24}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 24 = 4.$$

Il volume medio di acqua all'interno del tubo, nell'arco delle 6 ore che intercorrono tra la bassa marea e l'alta marea, è di $4\ \text{m}^3$.

2 **a)** Consideriamo la funzione integrale $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ poiché g è continua.

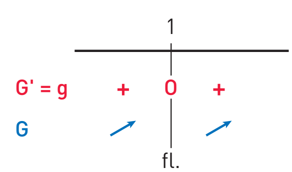
Otteniamo:

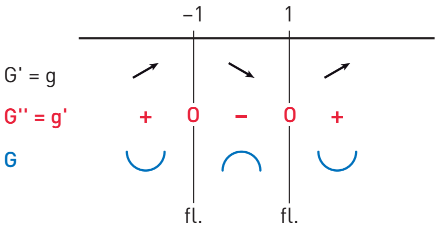
$G(0) = \int_0^0 g(t)\,dt = 0;$

$G(1) = \int_0^1 g(t)\,dt = 1 - A = 1 - \ln 2,$ dove A è l'area della regione compresa fra Γ e le rette di equazione $y = 1$ e $x = 1$, evidenziata nella figura del testo;

$G(-1) = \int_0^{-1} g(t)\,dt = -\int_{-1}^0 g(t)\,dt = -(1 + \ln 2),$ per la simmetria di Γ rispetto al punto $(0; 1)$.

b) La funzione integrale G è continua in $\mathbb{R}$ e si annulla in $x = 0$.
La funzione g è sempre positiva tranne per $x = 1$, dove si annulla; poiché $G' = g$, la funzione G risulta dunque sempre crescente e presenta un punto di flesso a tangente orizzontale in $x = 1$.





La funzione g è crescente per $x < -1$, decrescente per $-1 < x < 1$ e nuovamente crescente per $x > 1$.
I punti di ascissa $x = -1$ e $x = 1$ sono punti a tangente orizzontale per Γ essendo punti di massimo assoluto e di minimo assoluto di g. Quindi $g'(\pm 1) = G''(\pm 1) = 0$ e la funzione G ha punti di flesso di coordinate $(-1; G(-1))$ e $(1; G(1))$.

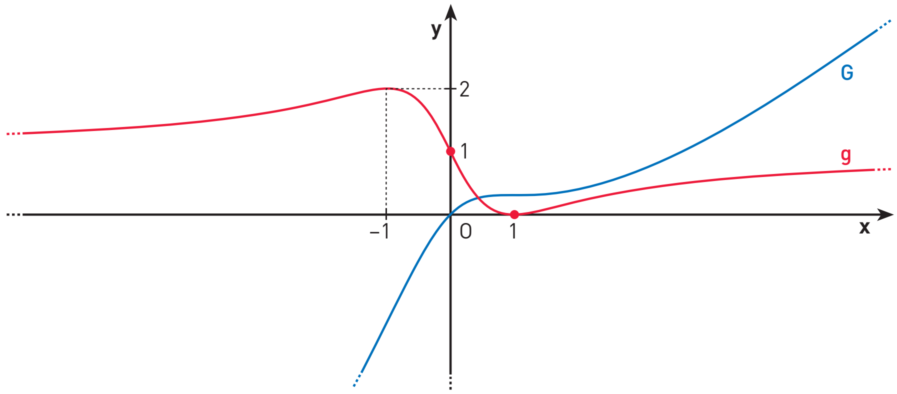
Per $x \to -\infty$ la funzione G tende a $-\infty$, infatti $g(x)$ è costantemente maggiore di 1 per $x < 0$ e quindi:

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = \lim_{x\to-\infty} \int_0^x g(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty} -\int_x^0 g(t)\,dt < \lim_{x\to-\infty} -\int_x^0 1dt = \lim_{x\to-\infty} -\int_x^0 1dt = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$$

In modo simile, per $x \to +\infty$ la funzione G tende a $+\infty$, infatti $g(x)$ è definitivamente maggiore di 0,5 per $x > x_0$ e quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x g(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left[\int_0^{x_0} g(t)\,dt + \int_{x_0}^x g(t)\,dt\right] > \int_0^{x_0} g(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty} \int_{x_0}^x 0,5dt = +\infty.$$

Riassumendo, la funzione G: è sempre crescente; si annulla in $x = 0$; presenta due flessi in $(-1; G(-1))$ e $(1; G(1))$; volge la concavità verso l'alto per $x < -1$ e per $x > 1$, verso il basso per $-1 < x < 1$; tende a $\pm\infty$ per x che tende rispettivamente a $\pm\infty$.
Possiamo tracciare un possibile andamento del grafico di G.



Determiniamo la pendenza delle rette tangenti al grafico di G nei punti di ascissa $x = 1$ e $x = -1$.
Dal grafico deduciamo:

$$G'(-1) = g(-1) = 2; \qquad G'(1) = g(1) = 0.$$

La retta tangente al grafico di G nel punto di ascissa -1 ha equazione:

$$y - G(-1) = G'(-1)\cdot(x+1) \to y + (1+\ln 2) = 2\cdot(x+1) \to y = 2x + 1 - \ln 2.$$

La retta tangente al grafico di G nel punto di ascissa 1 ha equazione:

$$y - G(1) = G'(1)\cdot(x-1) \to y - (1-\ln 2) = 0\cdot(x-1) \to y = 1 - \ln 2.$$

c) Il grafico della curva integrale $H(x) = \int_1^x g(t)\,dt$ ha lo stesso andamento di quello di G, ma è tale che $H(1) = 0$. Quindi per ottenere il grafico di H è sufficiente traslare il grafico di G in modo che la nuova curva incontri l'asse x nel punto di ascissa 1. Infatti:

$$H(x) = \int_1^x g(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt - \int_0^1 g(t)\,dt = G(x) - G(1) = G(x) - 1 + \ln 2.$$

d) La funzione g' è pari se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y, cioè se $g'(-x) = g'(x)$ per ogni x in $\mathbb{R}$.
Verifichiamo dunque che $g'(-x) = g'(x)$.
Il grafico di g è simmetrico rispetto al punto (0; 1) e le equazioni della simmetria sono

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2 - y \end{cases},$$

pertanto:

$$g(-x) = 2 - g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Deriviamo i due membri:

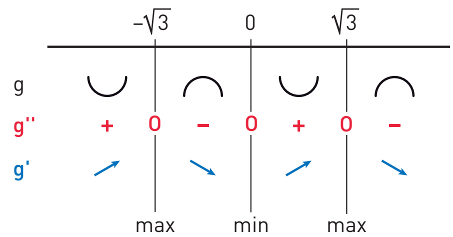
$$D[g(-x)] = D[2 - g(x)] \to -g'(-x) = -g'(x) \to g'(x) = g'(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Analizziamo l'andamento di g' per tracciarne il grafico.

Nei punti a tangente orizzontale di Γ la derivata prima g' si annulla, quindi il grafico di g' interseca l'asse x nei punti di ascissa $x = -1$ e $x = 1$. La funzione g' è positiva per $x < -1$ e per $x > 1$, è negativa per $-1 < x < 1$.

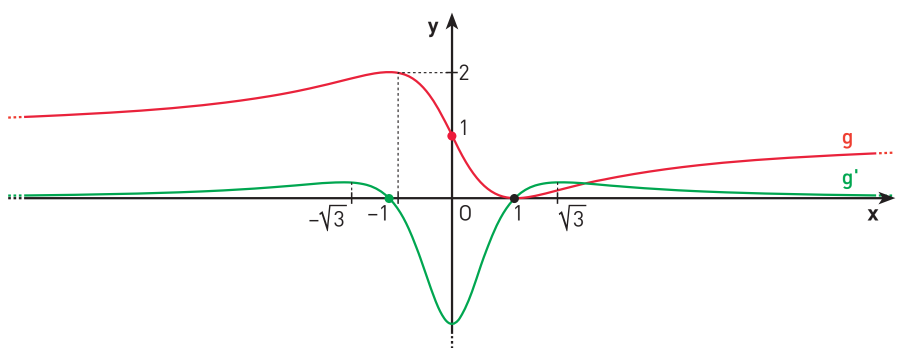
I punti di ascissa $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ e $x = \sqrt{3}$ sono flessi per la funzione g.

In particolare g'' si annulla in tali punti, che risultano quindi punti estremanti per g'; la funzione g' ha un minimo in $x = 0$ e un massimo in $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$.



Poiché la funzione g' è positiva per $x < -1$ e per $x > 1$, il minimo trovato è punto di minimo assoluto. La funzione g ammette l'asintoto orizzontale $y = 1$, quindi il grafico di g' ammette l'asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per x che tende a $\pm\infty$. Poiché la funzione g' è simmetrica rispetto all'asse y, i massimi trovati sono entrambi punti di massimo assoluto.

Tracciamo un possibile grafico della funzione g'.



e) Impostiamo il calcolo dell'integrale richiesto:

$$\int_{-2}^{1} [g(x) - g'(x)]dx = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx - \int_{-2}^{1} g'(x)\,dx.$$

Valutiamo ciascuno dei due integrali.

$$\int_{-2}^{1} g(x)\,dx = \int_{-2}^{1} \frac{(x-1)^2}{x^2+1}dx = \int_{-2}^{1} \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}dx = \int_{-2}^{1}\left(1 - \frac{2x}{x^2+1}\right)dx = [x - \ln(x^2+1)]_{-2}^{1} =$$

$$= [x - \ln(x^2+1)]_{-2}^{1} = (1 - \ln 2) - (-2 - \ln 5) = 3 - \ln 2 + \ln 5$$

$$\int_{-2}^{1} g'(x)\,dx = [g(x)]_{-2}^{1} = \left[\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\right]_{-2}^{1} = 0 - \frac{9}{5} = -\frac{9}{5}$$

L'integrale richiesto vale dunque:

$$\int_{-2}^{1} [g(x) - g'(x)]dx = (3 - \ln 2 + \ln 5) - \left(-\frac{9}{5}\right) = \frac{24}{5} - \ln 2 + \ln 5.$$

RISOLUZIONE DEI QUESITI

1 Indichiamo con $s(t)$ la posizione della pallina in funzione del tempo.
Poiché all'istante $t = 0$ la pallina era nell'ascissa $x = 1$ m, abbiamo la condizione iniziale $s(0) = 1$.

La velocità istantanea della pallina è espressa dalla derivata prima della legge oraria: $s'(t) = v(t)$.
Sfruttiamo questa uguaglianza per determinare la legge oraria, risolvendo l'equazione differenziale:

$$s'(t) = 32k - 4t^3 \quad \rightarrow \quad \int s'(t)\,dt = \int (32k - 4t^3)\,dt \quad \rightarrow \quad s(t) = 32kt - t^4 + c.$$

Imponiamo la condizione iniziale per ricavare c:

$$s(0) = 1 \quad \rightarrow \quad 32k \cdot 0 - 0^4 + c = 1 \quad \rightarrow \quad c = 1 \quad \rightarrow \quad s(t) = 32kt - t^4 + 1.$$

Per determinare k utilizziamo la seconda informazione: l'ascissa massima raggiunta è 4 metri, quindi all'istante t_m abbiamo $v(t_m) = 0$ e $s(t_m) = 4$.
Cerchiamo innanzitutto gli zeri di $v(t)$:

$$v(t_m) = 0 \quad \rightarrow \quad 32k - 4t_m^3 = 0 \quad \rightarrow \quad t_m = 2\sqrt[3]{k}.$$

Sostituiamo nell'equazione oraria e determiniamo k:

$$s(t_m) = 1 \quad \rightarrow \quad 32k \cdot 2\sqrt[3]{k} - (2\sqrt[3]{k})^4 + 1 = 4 \quad \rightarrow \quad 48k\sqrt[3]{k} = 3 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{8}.$$

L'equazione della velocità istantanea della pallina è dunque:

$$v(t) = 4 - 4t^3.$$

2 **a)** La probabilità di comporre la parola «NEL» digitando a caso tre lettere su una tastiera di ventisei lettere è data da:

$$p = \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{26} = \left(\frac{1}{26}\right)^3 \simeq 5{,}690 \cdot 10^{-5}.$$

b) La probabilità di comporre «NEL» la prima volta al quinto tentativo è data dal prodotto delle probabilità di *non* comporla nei primi quattro tentativi e di comporla invece alla quinta prova:

$$(1-p)^4 p = \left[1 - \left(\frac{1}{26}\right)^3\right]^4 \cdot \left(\frac{1}{26}\right)^3 \simeq 5{,}688 \cdot 10^{-5}.$$

c) In generale, la probabilità dell'evento E_0 = «avere zero successi in n prove» (cioè la probabilità di non comporre mai la parola «NEL» in n tentativi) è pari a:

$$(1-p)^n = \left[1 - \left(\frac{1}{26}\right)^3\right]^n.$$

La probabilità di avere almeno un successo in n prove è data dalla probabilità dell'evento contrario di E_0, quindi è pari a:

$$1 - \left[1 - \left(\frac{1}{26}\right)^3\right]^n.$$

Affinché tale probabilità sia superiore al 90%, deve essere:

$$1 - \left[1 - \left(\frac{1}{26}\right)^3\right]^n > 0{,}9 \quad \rightarrow \quad \left[1 - \left(\frac{1}{26}\right)^3\right]^n < 0{,}1 \quad \rightarrow \quad n \log\left[1 - \left(\frac{1}{26}\right)^3\right] < \log 0{,}1 \quad \rightarrow$$

$$n > \frac{\log 0{,}1}{\log\left[1 - \left(\frac{1}{26}\right)^3\right]} \simeq 40\,469{,}08.$$

Osserviamo che $\log\left[1 - \left(\frac{1}{26}\right)^3\right] < 0$, quindi nella divisione è stato cambiato il verso della disuguaglianza. Per avere una probabilità di successo di almeno il 90%, bisogna fare almeno 40 470 tentativi.

d) Poiché la probabilità di successo $p = \frac{1}{26^3}$ è piccola rispetto al numero $n = 26^3$ delle prove, possiamo applicare la distribuzione di Poisson. Possiamo quindi dire che la probabilità di ottenere k successi in n prove è data da:

$$p(E = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \text{con } \lambda = n \cdot p = 1.$$

La probabilità di ottenere *almeno* due successi in 26^3 prove è dunque uguale a:

$$p(E > 1) = 1 - p(E = 0) - p(E = 1) = 1 - \frac{1^0}{0!} \cdot e^{-1} - \frac{1^1}{1!} \cdot e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} \simeq 0{,}2642.$$

Effettuando $26^3 = 17\,576$ tentativi, abbiamo una probabilità di circa il 26,42% di comporre almeno due volte la parola «NEL».

3 **a)** Un triangolo è rettangolo se e solo se soddisfa il teorema di Pitagora.
Calcoliamo dunque le lunghezze dei lati del triangolo OAB.

$$\overline{OA} = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2 + (z_A - z_O)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3.$$

In modo analogo:

$$\overline{OB} = \sqrt{6^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{45};$$

$$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Poiché $45 = 9 + 36$, vale la relazione $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$ e il triangolo OAB è rettangolo, con cateti OA e AB (l'angolo retto è in A).
L'area del triangolo è data da:

$$\text{area}_{OAB} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9.$$

b) Il volume del tetraedro si trova con la formula:

$$\text{volume}_{OABV} = \frac{\text{area di base} \cdot \text{altezza}}{3}.$$

Se assumiamo area_{OAB} come area di base, allora l'altezza del tetraedro corrisponde alla distanza del vertice V dal piano π su cui giace OAB. Tale piano ha equazione generica $ax + by + cz + d = 0$ (con a, b e c non tutti nulli), che risulta soddisfatta dai punti O, A, B:

$$\begin{cases} 0a + 0b + 0c + d = 0 \\ 2a - 2b + c + d = 0 \\ 6a + 0b - 3c + d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 2a \\ d = 0 \end{cases}.$$

Posto $a = 1$ (possiamo scegliere un qualunque valore non nullo), l'equazione del piano diventa:

$$\pi\colon x + 2y + 2z = 0.$$

La distanza del vertice V dal piano π vale:

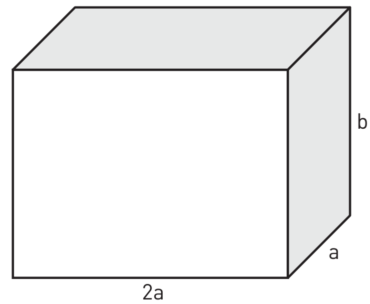
$$d = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{18}{3} = 6.$$

Il volume del tetraedro è quindi pari a:

$$\text{volume}_{OABV} = \frac{9 \cdot 6}{3} = 18.$$

4 La distribuzione $f(h)$ assegnata è una distribuzione gaussiana di media $\mu = 170$ cm e deviazione standard $\sigma = 10$ cm.
La probabilità che l'altezza di un ragazzo scelto a caso nel gruppo ricada entro una deviazione standard dalla media, cioè tra 160 cm e 180 cm, è del 68,26% (corrisponde alla probabilità $P(-1 < Z < 1) = 0{,}6826$ della variabile standardizzata).
La probabilità che l'altezza sia esterna a tale intervallo, cioè sia minore di 160 cm o maggiore di 180 cm, è allora pari a $100\% - 68{,}26\% = 31{,}74\%$.
Poiché la distribuzione gaussiana è simmetrica, la probabilità che l'altezza risulti maggiore di 180 cm corrisponde alla metà di questa percentuale: $31{,}74\% : 2 = 15{,}87\%$.

5 Il volume di un parallelepipedo di dimensioni a, $2a$ e b è:



$$V = 2a^2 b.$$

Se esprimiamo le misure di a e b in decimetri e il volume, indifferentemente, in litri o in dm³ (nelle misure di capacità, 1 L = 1 dm³), otteniamo:

$$2a^2 b = 27 \quad \rightarrow \quad b = \frac{27}{2a^2}.$$

La superficie totale del parallelepipedo, e quindi della borsa, è:

$$S(a; b) = 2 \cdot 2a^2 + 2 \cdot ab + 2 \cdot 2ab = 4a^2 + 6ab.$$

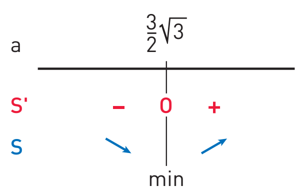
Sostituendo b otteniamo:

$$S(a) = 4a^2 + \frac{81}{a}.$$

Dobbiamo trovare il valore di a che minimizza la superficie $S(a)$. Calcoliamo dunque la derivata prima e studiamo il suo segno:

$$S'(a) = 8a - \frac{81}{a^2}, \quad \text{con } a > 0.$$

$$S'(a) > 0 \quad \rightarrow \quad 8a - \frac{81}{a^2} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{8a^3 - 81}{a^2} > 0 \quad \rightarrow \quad 8a^3 - 81 > 0 \quad \rightarrow \quad a > \frac{3}{2}\sqrt[3]{3}.$$



La superficie minima si ottiene quando $a = \frac{3}{2}\sqrt[3]{3}$ (misura espressa in decimetri). Per questo valore di a le misure della borsa termica sono:

$$a = \frac{3}{2}\sqrt[3]{3} \text{ dm} \quad \rightarrow \quad a \simeq 216 \text{ mm};$$

$$2a = 3\sqrt[3]{3} \text{ dm} \quad \rightarrow \quad 2a \simeq 433 \text{ mm};$$

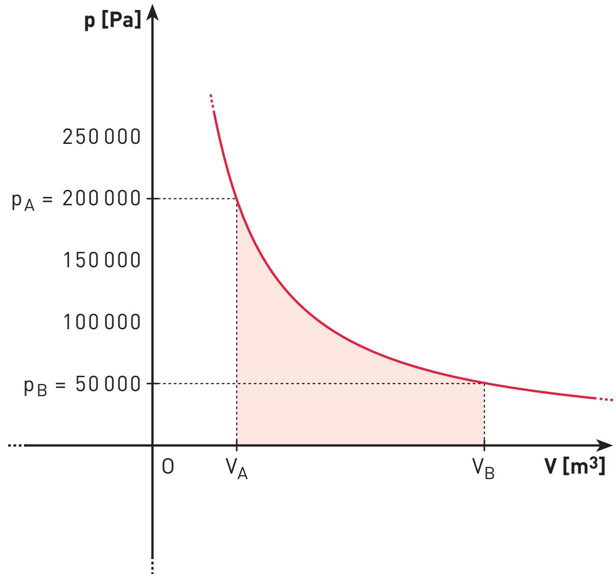
$$b = \frac{27}{2a^2} = \frac{27}{2} \cdot \frac{4}{9\sqrt[3]{9}} = \frac{6}{\sqrt[3]{9}} \text{ dm} \quad \rightarrow \quad b \simeq 288 \text{ mm}.$$

6 Il grafico di una trasformazione isoterma (quindi a temperatura costante) è un ramo di iperbole nel piano p-V, dove p è collocato sull'asse delle ordinate e V sull'asse delle ascisse.
Poiché il prodotto pV è costante, abbiamo:

$$p_A \cdot V_A = 2 \cdot 10^5 \cdot 5 = 10^6;$$

$$p_B \cdot V_B = 10^6 \quad \rightarrow \quad p_B \cdot 20 = 10^6 \quad \rightarrow \quad p_B = \frac{10^6}{20} = 5 \cdot 10^4.$$

Disegniamo la curva $p(V) = \dfrac{10^6}{V}$ che descrive la trasformazione.

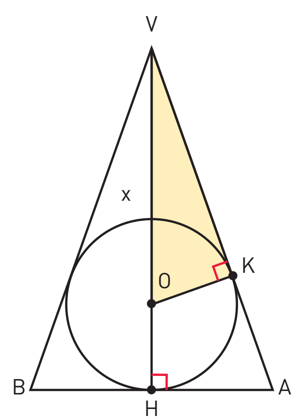


Il lavoro compiuto dal gas è dato dall'area sottesa al grafico evidenziata in figura:

$$L_{AB} = \int_5^{20} \frac{10^6}{V} dV = 10^6 [\ln V]_5^{20} = 10^6 \cdot (\ln 20 - \ln 5) = 10^6 \cdot \ln \frac{20}{5} = 10^6 \cdot \ln 4 \simeq 1{,}39 \cdot 10^6.$$

L'unità di misura del lavoro è il joule, quindi il lavoro richiesto è pari a circa $1{,}39 \cdot 10^6$ J.

7 Consideriamo la sfera di centro O e raggio 1 e un cono circolare retto di vertice V, altezza VH e raggio di base HA circoscritto alla sfera.



Poniamo $\overline{VO} = x$, con $x > 1$, e indichiamo con K il punto di tangenza tra un apotema del cono e la sfera inscritta.
Il triangolo VKO è retto in K; applicando il teorema di Pitagora otteniamo:

$$\overline{VK} = \sqrt{\overline{VO}^2 - \overline{OK}^2} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Il triangolo VHA, retto in H e con $\overline{VH} = x + 1$, è simile al triangolo VKO per il primo criterio di similitudine dei triangoli; vale la seguente relazione:

$$\overline{VK} : \overline{OK} = \overline{VH} : \overline{HA} \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2 - 1} : 1 = (x + 1) : \overline{HA} \quad \rightarrow \quad \overline{HA} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

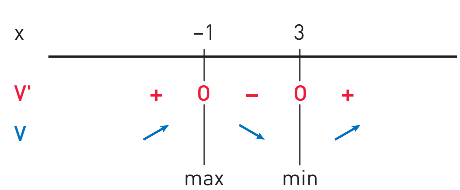
Il volume del cono, in funzione di x, è:

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot \pi \overline{HA}^2 \cdot \overline{VH} = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)^2 \cdot (x + 1) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(x + 1)^2}{x - 1}.$$

Per minimizzare il volume, cerchiamo il minimo della funzione $V(x)$ calcolando la sua derivata prima e studiando il suo segno:

$$V'(x) = \frac{1}{3} \cdot \pi \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}.$$

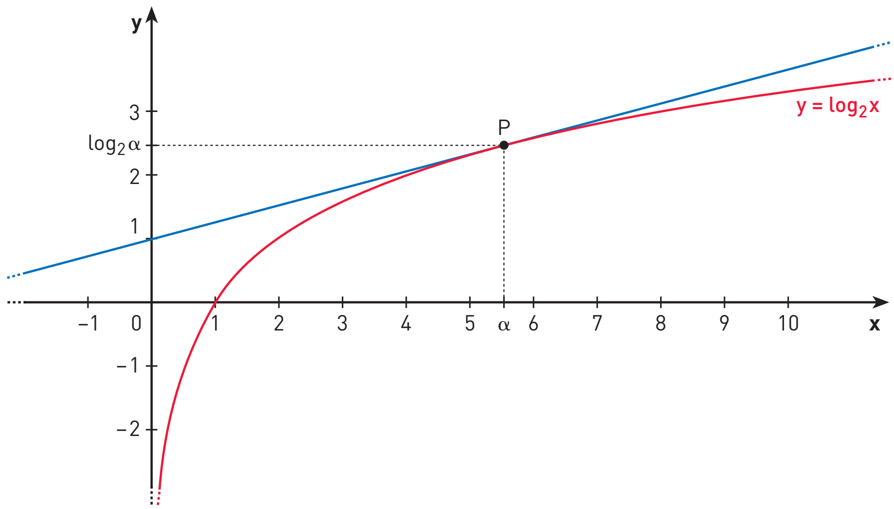
Dal grafico dei segni deduciamo che la funzione $V(x)$ ha un minimo per $x = 3$ (accettabile perché positivo).
Quindi il cono ha volume minimo quando $x = 3$ e in questo caso il volume è pari a:



$$V(3) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{16}{2} = \frac{8\pi}{3}.$$

La corrispondente altezza è $h(3) = 3 + 1 = 4$.

8 Sia $P(\alpha; \log_2 \alpha)$, con $\alpha > 0$, un generico punto appartenente alla curva di equazione $y = \log_2 x$.



Il coefficiente angolare della retta t tangente alla curva in P è dato dalla derivata prima della funzione calcolata in $x = \alpha$:

$$y'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_2 e \quad \rightarrow \quad y'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot \log_2 e.$$

L'equazione della generica retta tangente t è dunque:

$$y - \log_2 \alpha = \frac{\log_2 e}{\alpha} \cdot (x - \alpha).$$

Per determinare l'equazione di t basta imporre il passaggio per il punto $(0; 1)$:

$$1 - \log_2 \alpha = \frac{\log_2 e}{\alpha} \cdot (0 - \alpha) \quad \rightarrow \quad \log_2 \alpha = 1 + \log_2 e \quad \rightarrow \quad \log_2 \alpha = \log_2 2e \quad \rightarrow \quad \alpha = 2e.$$

L'equazione della retta tangente t cercata è pertanto:

$$y - \log_2 2e = \frac{\log_2 e}{2e} \cdot (x - 2e) \quad \rightarrow \quad y = \frac{\log_2 e}{2e} \cdot x + 1.$$

9 Quando x tende a 1, il rapporto $\frac{x^2 - h}{e^x \ln x}$ tende alla forma $\frac{1-h}{0}$.

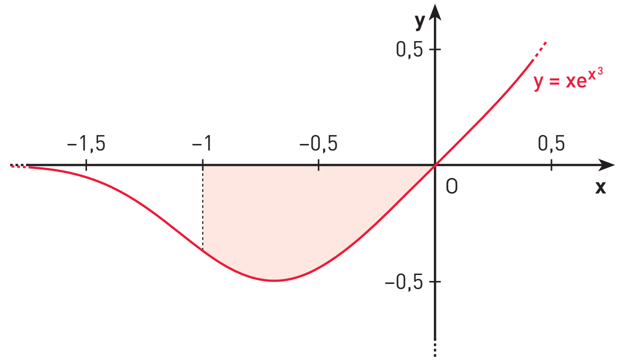
Se $h \neq 1$, il limite tende allora a infinito ed è diverso da $\frac{2}{e}$.

Se $h = 1$, invece, il limite si presenta nella forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Verifichiamo se, in questo caso, sciogliendo la forma indeterminata otteniamo il valore $\frac{2}{e}$. Applichiamo De L'Hospital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{e^x \ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2}{x e^x \ln x + e^x} = \frac{2}{e}.$$

La forma indeterminata porta effettivamente al valore $\frac{2}{e}$, quindi il valore cercato per h è 1.

10 Disegniamo la curva ed evidenziamo la regione da ruotare attorno all'asse x.



La curva passa per l'origine e assume valori negativi per $x < 0$; l'integrale che fornisce il volume del solido di rotazione è:

$$V = \pi \int_{-1}^{0} (x \cdot e^{x^3})^2 dx = \pi \int_{-1}^{0} x^2 \cdot e^{2x^3} dx = \frac{\pi}{6} \int_{-1}^{0} 6x^2 \cdot e^{2x^3} dx = \frac{\pi}{6} [e^{2x^3}]_{-1}^{0} = \frac{\pi}{6}(1 - e^{-2}) \simeq 0,45.$$

Tavola di Sheppard

Valori della funzione $F(z)$. Aree sotto la curva normale standardizzata da 0 a z.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767

Griglia di valutazione della competenza in matematica
Simulazione ministeriale del 25 febbraio 2015

Indicatori	Descrittori	Punti	Problemi	
			1	2
Comprendere Analizzare la situazione problematica, rappresentare i dati, interpretarli e tradurli in linguaggio matematico.	Non comprende le richieste o le recepisce in maniera inesatta o parziale, non riuscendo a riconoscere i concetti chiave e le informazioni essenziali, o, pur avendone individuati alcuni, non li interpreta correttamente. Non stabilisce gli opportuni collegamenti tra le informazioni e utilizza i codici matematici in maniera insufficiente e/o con gravi errori.	0-3		
	Analizza e interpreta le richieste in maniera parziale, riuscendo a selezionare solo alcuni dei concetti chiave e delle informazioni essenziali, o, pur avendoli individuati tutti, commette degli errori nell'interpretarne alcuni, nello stabilire i collegamenti e/o nell'utilizzare i codici matematici.	4-8		
	Analizza in modo adeguato la situazione problematica, individuando e interpretando correttamente i concetti chiave, le informazioni e le relazioni tra queste riconoscendo e ignorando gli eventuali distrattori; utilizza con adeguata padronanza i codici matematici grafico-simbolici, nonostante lievi inesattezze e/o errori.	9-13		
	Analizza e interpreta in modo completo e pertinente i concetti chiave, le informazioni essenziali e le relazioni tra queste, ignorando gli eventuali distrattori; utilizza i codici matematici grafico–simbolici con grande padronanza e precisione, pur se con qualche lieve inesattezza, tale da non inficiare, tuttavia, la comprensione complessiva della situazione problematica.	14-18		
Individuare Mettere in campo strategie risolutive attraverso una modellizzazione del problema e individuare la strategia più adatta.	Non individua strategie di lavoro o ne individua di non adeguate. Non è in grado di individuare modelli standard pertinenti. Non si coglie alcuno spunto creativo nell'individuare il procedimento risolutivo. Non individua gli strumenti formali opportuni.	0-4		
	Individua strategie di lavoro poco efficaci, talora sviluppandole in modo poco coerente; e usa con una certa difficoltà i modelli noti. Dimostra una scarsa creatività nell'impostare le varie fasi del lavoro. Individua con difficoltà e qualche errore gli strumenti formali opportuni.	5-10		
	Sa individuare delle strategie risolutive, anche se non sempre le più adeguate ed efficienti. Dimostra di conoscere le procedure consuete e i possibili modelli trattati in classe, ma li utilizza in modo non sempre adeguato. Propone alcune strategie originali. Individua gli strumenti di lavoro formali opportuni anche se con qualche incertezza e dopo alcuni tentativi.	11-16		
	Attraverso congetture effettua, con padronanza, chiari collegamenti logici. Individua strategie di lavoro adeguate ed efficienti. Utilizza nel modo migliore i modelli noti e ne propone di nuovi. Dimostra originalità e creatività nell'impostare le varie fasi di lavoro. Individua con cura e precisione gli strumenti formali opportuni.	17-21		
Sviluppare il processo risolutivo Risolvere la situazione problematica in maniera coerente, completa e corretta, applicando le regole ed eseguendo i calcoli necessari, con l'eventuale ausilio di strumenti informatici.	Non applica le strategie scelte o le applica in maniera non corretta. Non sviluppa il processo risolutivo o lo sviluppa in modo incompleto e/o errato. Non è in grado di utilizzare procedure e/o teoremi o li applica in modo errato e/o con numerosi errori nei calcoli. La soluzione ottenuta non è coerente con il contesto del problema. Non è in grado di utilizzare eventuali strumenti informatici disponibili.	0-4		
	Applica le strategie scelte in maniera parziale e non sempre appropriata. Sviluppa il processo risolutivo in modo incompleto. Non sempre è in grado di utilizzare procedure e/o teoremi o li applica in modo parzialmente corretto e/o con numerosi errori nei calcoli. La soluzione ottenuta è coerente solo in parte con il contesto del problema. Non è in grado di utilizzare in modo autonomo e proficuo eventuali strumenti informatici disponibili.	5-10		
	Applica le strategie scelte in maniera corretta pur con qualche imprecisione. Sviluppa il processo risolutivo quasi completamente. È in grado di utilizzare procedure e/o teoremi o regole e li applica quasi sempre in modo corretto e appropriato. Commette qualche errore nei calcoli. La soluzione ottenuta è generalmente coerente con il contesto del problema. Utilizza in modo autonomo e proficuo eventuali strumenti informatici disponibili.	11-16		
	Applica le strategie scelte in maniera corretta supportandole anche con l'uso di modelli e/o diagrammi e/o simboli. Sviluppa il processo risolutivo in modo analitico, completo, chiaro e corretto. Applica procedure e/o teoremi o regole in modo corretto e appropriato, con abilità e con spunti di originalità. Esegue i calcoli in modo accurato, pur con qualche imprecisione, la soluzione è ragionevole e coerente con il contesto del problema. Utilizza con sicurezza, in modo consapevole e proficuo eventuali strumenti informatici disponibili.	17-21		
Argomentare Commentare e giustificare opportunamente la scelta della strategia applicata, i passaggi fondamentali del processo esecutivo e la coerenza dei risultati.	Non argomenta o argomenta in modo errato la strategia/procedura risolutiva e la fase di verifica, utilizzando un linguaggio matematico non appropriato o molto impreciso.	0-3		
	Argomenta in maniera frammentaria e/o non sempre coerente la strategia/procedura esecutiva o la fase di verifica. Utilizza un linguaggio matematico per lo più appropriato, ma non sempre rigoroso.	4-7		
	Argomenta in modo coerente ma incompleto la procedura esecutiva e la fase di verifica. Spiega la risposta, ma non le strategie risolutive adottate (o viceversa). Utilizza un linguaggio matematico pertinente o con qualche incertezza.	8-11		
	Argomenta in modo coerente, preciso e accurato, approfondito ed esaustivo tanto le strategie adottate quanto la soluzione ottenuta. Mostra un'ottima padronanza nell'utilizzo del linguaggio scientifico.	12-15		

Tabella di conversione dal punteggio grezzo al voto in quindicesimi

Voto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Punti	0-2	3-5	6-9	10-13	14-17	18-21	22-26	17-31	32-36	37-42	43-48	49-54	55-61	62-68	69-75

Voto assegnato _____/15