

PROBLEMI INTORNO A NOI

1 Un modello per la secrezione dell'insulina

Nel corpo umano la concentrazione di glucosio nel sangue, detta *glicemia*, è normalmente compresa fra 60 mg/dL e 110 mg/dL quando si è a digiuno. Il glucosio è assorbito dai tessuti più rapidamente quando la glicemia è alta, più lentamente quando è bassa. Questo processo di assorbimento più o meno rapido è regolato dall'*insulina*, un ormone secreto dal pancreas. Se la glicemia è alta, l'insulina è prodotta più rapidamente per accelerare l'assorbimento del glucosio; se la glicemia è bassa, la produzione è più lenta, per un minore assorbimento.

In un modello semplificato, la rapidità di secrezione dell'insulina S in funzione della glicemia g è espressa dalla funzione:

$$S(g) = \frac{100}{1 + 19e^{-\frac{g}{30}}},$$

con $g \geq 0$ misurata in mg/dL e S misurata in mU/min, cioè in milliUnità al minuto.

- a) Perché è stata posta la condizione $g \geq 0$ se la funzione matematica $S(g)$ può essere calcolata per qualsiasi valore di g ? Ritieni che dovrebbero essere poste altre condizioni sul valore di g ? Rappresenta il grafico di $S(g)$ per $g \geq 0$.
- b) Qual è, secondo il modello, la massima rapidità possibile di secrezione dell'insulina da parte del pancreas? Per quale valore della glicemia la rapidità di secrezione dell'insulina è pari al 90% della potenzialità massima?
- c) Esiste un valore della glicemia in corrispondenza del quale è massimo l'aumento della rapidità di secrezione dell'insulina in seguito a un aumento, piccolo quanto si vuole, della glicemia stessa. A quale punto del grafico corrisponde? Determina il valore.
- d) In condizioni fisiologiche normali la glicemia non scende sotto i 60 mg/dL. Si vuole studiare la rapidità di secrezione dell'insulina per $60 \leq g \leq 130$, cioè i valori che si hanno a digiuno e dopo un pasto non abbondante, utilizzando una retta anziché la funzione del modello $S(g)$. Nello stesso riferimento cartesiano del grafico di $S(g)$ disegna dunque la retta $\bar{s}(g)$ che assume lo stesso valore di $S(g)$ per $g = 60$ mg/dL, e la pendenza in tale punto coincide con quella di $S(g)$. Di quanto differiscono percentualmente le previsioni sulla rapidità di secrezione dell'insulina per $g = 130$ mg/dL da parte di $S(g)$ e di $\bar{s}(g)$?

RISOLUZIONE

- a) Abbiamo posto la condizione $g \geq 0$ perché g rappresenta una concentrazione (in questo caso del glucosio nel sangue) e quindi non può assumere valori negativi. Sebbene il problema richieda di studiare la funzione per $g \geq 0$, dal punto di vista medico la glicemia non può crescere all'infinito: già per un valore $g = 200$ mg/dL si è in presenza di diabete; valori più alti portano a gravi conseguenze per l'organismo, fino al coma iperglicemico e alla morte. In modo analogo, anche valori troppo bassi della glicemia portano a gravi disturbi; quando scende al valore $g = 20$ mg/dL, può portare al coma ipoglicemico e alla morte.

Studiamo dunque la funzione $S(g)$ nell'intervallo richiesto $[0; +\infty[$.

Agli estremi dell'intervallo la funzione assume i valori:

$$S(0) = 5, \quad \lim_{g \rightarrow +\infty} S(g) = 100,$$

quindi la funzione ammette l'asintoto orizzontale di equazione $S = 100$.

La derivata prima

$$S'(g) = \frac{190}{3} \cdot \frac{e^{-\frac{g}{30}}}{(1 + 19e^{-\frac{g}{30}})^2}$$

è positiva per ogni valore di g , quindi la funzione $S(g)$ è strettamente crescente.

La derivata seconda è

$$S''(g) = \frac{19}{9} e^{-\frac{g}{30}} \cdot \frac{19e^{-\frac{g}{30}} - 1}{(1 + 19e^{-\frac{g}{30}})^3}$$

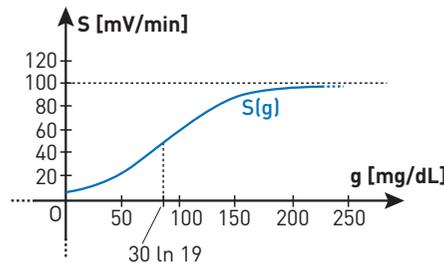
e il suo segno è determinato dal segno di $19e^{-\frac{g}{30}} - 1$.

	30 ln 19		
$19e^{-\frac{g}{30}} - 1$	+	0	-
$S''(g)$	+	0	-
$S(g)$	⤵		⤵
		fl.	

La funzione $S(g)$ volge quindi la concavità verso l'alto in $]0; 30 \ln 19[$, con $30 \ln 19 \simeq 80,33$, e verso il basso per $g > 30 \ln 19$. Il flesso in $30 \ln 19$ ha coordinate $(30 \ln 19; 50)$. Infatti, se calcoliamo il valore di S in $30 \ln 19$:

$$S(30 \ln 19) = \frac{100}{1 + 19e^{-\frac{30 \ln 19}{30}}} = \frac{100}{1 + 19 \cdot \frac{1}{19}} = \frac{100}{2} = 50.$$

Disegniamo il grafico della funzione.



- b)** Poiché la funzione $S(g)$ è strettamente crescente la rapidità massima di secrezione dell'insulina è individuata dall'asintoto orizzontale, cioè 100 mU/min, ma si tratta in realtà di un estremo superiore e non di un massimo, che non esiste (nel modello considerato).

La rapidità di secrezione dell'insulina raggiunge il 90% della potenzialità massima quando $S(g) = 90$, quindi:

$$\frac{100}{1 + 19e^{-\frac{g}{30}}} = 90 \rightarrow e^{-\frac{g}{30}} = \frac{1}{171} \rightarrow g = 30 \ln 171 \simeq 154.$$

- c)** Il valore g_0 richiesto per la glicemia, in corrispondenza del quale è massimo l'aumento della rapidità di secrezione dell'insulina in seguito a un aumento della glicemia stessa, coincide con il valore g_0 per il quale è massima la derivata prima $S'(g)$ e corrisponde perciò al punto di flesso già calcolato:

$$g_0 = 30 \ln 19 \simeq 88,33.$$

- d) La retta da disegnare è la tangente al grafico di $S(g)$ nel punto di ascissa $g = 60$ mg/dL. Tale retta ha equazione:

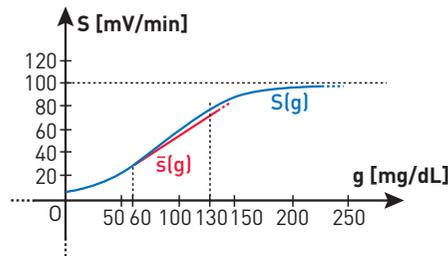
$$\bar{s}(g) - S(60) = S'(60) \cdot (g - 60).$$

Calcoliamo i valori:

$$S(60) = \frac{100}{1 + 19e^{-2}} \simeq 28; \quad S'(60) = \frac{190}{3} \cdot \frac{e^{-2}}{(1 + 19e^{-2})^2} \simeq 0,67.$$

L'equazione della retta è:

$$\bar{s}(g) - 28 = 0,67 \cdot (g - 60) \rightarrow \bar{s}(g) = 0,67g - 12,2.$$



Per valutare la differenza percentuale fra le due previsioni, calcoliamo:

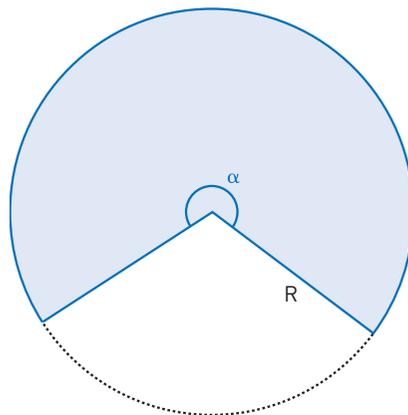
$$\bar{s}(130) = 0,67 \cdot 130 - 12,2 \simeq 74,9;$$

$$S(130) = \frac{100}{1 + 19e^{-\frac{130}{30}}} \simeq 80;$$

$$\text{differenza percentuale} = \frac{80 - 74,9}{80} \simeq 6,4.$$

2 Un gelato conveniente

Alberto lavora in una ditta che produce gelati, nel reparto che si occupa di realizzare gli incarti. Oggi deve progettare un involucro di forma conica, ricavato tagliando un settore circolare da un disco di raggio R assegnato, in modo che R sia l'apotema del cono.



- a) Posta $2x$ la misura in radianti dell'angolo α al centro del settore circolare che rappresenta lo sviluppo del cono, spiega dettagliatamente come Alberto può ricavare il volume del cono in funzione di x .

Alberto ha ottenuto la seguente espressione per il volume del cono:

$$V(x) = \frac{R^3}{3\pi^2} x^2 \sqrt{\pi^2 - x^2}, \text{ con } 0 \leq x \leq \pi.$$

- b)** Dopo aver verificato la correttezza dell'espressione precedente, in base a considerazioni generali e senza ricorrere a calcoli spiega perché Alberto può essere certo che vi sia un particolare valore di x , nell'intervallo $[0; \pi]$, in corrispondenza del quale il volume del cono è massimo.
- c)** Posto $R = \sqrt[3]{\pi^2}$ dm, studia e rappresenta la corrispondente funzione $V(x)$. Determina il valore di x che realizza l'incarto con la capienza massima, esprimendone la misura sia in radianti sia in gradi e primi. Calcola anche il valore della capienza massima, approssimando il dato ai cm^3 .

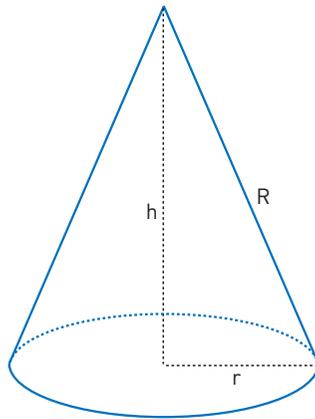
Ora Alberto deve affrontare un secondo problema: realizzare la base circolare di ciascun contenitore conico. Poiché la realizzazione di ciascun involucro lascia come scarto un secondo settore circolare, Alberto si chiede se sia possibile utilizzare tale scarto, ricavandone il cerchio di maggior raggio possibile, cioè quello inscritto nel settore stesso.

- d)** Spiega ad Alberto, utilizzando semplici considerazioni geometriche qualitative, perché non sia possibile realizzare la sua idea nel caso dell'involucro di capienza massima.
- e)** Dimostra che il raggio s della circonferenza inscritta nel settore circolare scartato è dato, sempre in funzione di x , dall'espressione:

$$s(x) = \frac{R \sin x}{1 + \sin x}.$$

RISOLUZIONE

- a)** Consideriamo il cono C che ha per sviluppo il settore circolare della circonferenza di raggio R con angolo al centro α . Indichiamo con h la sua altezza e con r il raggio della circonferenza di base.



La lunghezza della circonferenza di base del cono è pari alla lunghezza dell'arco corrispondente ad α nella circonferenza di raggio R ; detta $2x$ la misura in radianti dell'angolo α , con $0 \leq x \leq \pi$, deve allora essere:

$$2xR = 2\pi r \rightarrow r = \frac{R}{\pi} x.$$

Ricaviamo h con il teorema di Pitagora:

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{R}{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2}.$$

Possiamo allora ricavare il volume del cono in funzione di x :

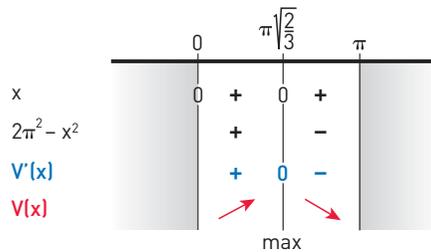
$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{R^3}{3\pi^2} x^2 \sqrt{\pi^2 - x^2}, \quad \text{con } 0 \leq x \leq \pi.$$

- b)** La funzione $V(x)$ trovata è definita e continua in $[0; \pi]$ ed è non negativa. In base al teorema di Weierstrass per le funzioni continue definite su un intervallo chiuso e limitato, la funzione assume in tale intervallo un valore minimo e un valore massimo. Poiché la funzione si annulla in $x = 0$ e in $x = \pi$, essendo per il resto non costante e positiva, concludiamo che il valore minimo è sicuramente 0, mentre il massimo viene a cadere in almeno un valore di x interno all'intervallo $[0; \pi]$. Inoltre, essendo la funzione derivabile in ogni punto interno all'intervallo, tale massimo deve corrispondere a un punto in cui la derivata prima è nulla, la cui esistenza è assicurata dal teorema di Rolle.
- c)** Posto $R = \sqrt[3]{\pi^2}$ dm, la funzione che esprime il volume (in dm^3) in funzione di x (espresso in radianti) diventa:

$$V(x) = \frac{x^2}{3} \sqrt{\pi^2 - x^2}, \quad \text{con } 0 \leq x \leq \pi.$$

Abbiamo già osservato che la funzione è limitata e non negativa, di valore nullo agli estremi dell'intervallo, e ovunque continua, pertanto non ci sono da calcolare limiti agli estremi del dominio. Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno:

$$V'(x) = \frac{2x}{3} \sqrt{\pi^2 - x^2} - \frac{x^3}{3\sqrt{\pi^2 - x^2}} = \frac{x(2\pi^2 - 3x^2)}{3\sqrt{\pi^2 - x^2}}, \quad \text{con } 0 \leq x < \pi.$$



La funzione $V(x)$ presenta dunque un massimo relativo per $x = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$; tale massimo è anche assoluto per quanto detto al punto precedente.

Esprimiamo il valore di x in radianti e in gradi sessagesimali:

$$x = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 2,565 \text{ rad};$$

$$x : \pi = x^\circ : 180 \rightarrow x^\circ = \frac{x \cdot 180}{\pi} = \frac{\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 180}{\pi} \simeq 146,969 \rightarrow x^\circ = 146^\circ 58'.$$

La capienza massima corrispondente vale:

$$V_{\max} = V\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi^3 \rightarrow V_{\max} \simeq 3,978 \text{ dm}^3 = 3978 \text{ cm}^3.$$

Sempre con riferimento alla derivata prima, notiamo l'andamento agli estremi del dominio:

$$V'(0) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} V'(x) = -\infty.$$

Calcoliamo la derivata seconda:

$$V''(x) = \frac{6x^4 - 9\pi^2x^2 + 2\pi^4}{3(\pi^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{con } 0 \leq x < \pi.$$

Il denominatore è sempre positivo; studiamo il segno del numeratore che coincide con il segno della derivata seconda:

$$6x^4 - 9\pi^2x^2 + 2\pi^4 > 0 \quad \text{disequazione biquadratica.}$$

Poniamo $x^2 = t$ e risolviamo l'equazione associata:

$$6t^2 - 9\pi^2 t + 2\pi^4 = 0 \rightarrow t = \frac{9\pi^2 \pm \sqrt{81\pi^4 - 48\pi^4}}{12} \rightarrow$$

$$t = \frac{9 - \sqrt{33}}{12} \pi^2 \simeq 2,68 \vee t = \frac{9 + \sqrt{33}}{12} \pi^2 \simeq 12,63.$$

La disequazione in t ha quindi soluzioni:

$$6t^2 - 9\pi^2 t + 2\pi^4 > 0 \rightarrow t < \frac{9 - \sqrt{33}}{12} \pi^2 \vee t > \frac{9 + \sqrt{33}}{12} \pi^2.$$

Sostituiamo $t = x^2$:

$$x^2 < \frac{9 - \sqrt{33}}{12} \pi^2 \vee x^2 > \frac{9 + \sqrt{33}}{12} \pi^2 \rightarrow |x| < \sqrt{\frac{9 - \sqrt{33}}{12}} \pi \simeq 1,64 \vee |x| > \sqrt{\frac{9 + \sqrt{33}}{12}} \pi \simeq 3,55.$$

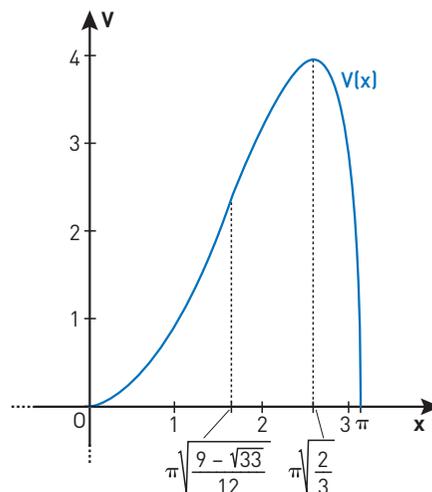
Poiché deve essere $0 \leq x < \pi$, la soluzione della disequazione biquadratica, e quindi l'intervallo in cui $V''(x)$ risulta positiva, è:

$$0 \leq x < \sqrt{\frac{9 - \sqrt{33}}{12}} \pi \simeq 1,64.$$

La funzione $V(x)$ volge dunque la concavità verso l'alto per $0 \leq x < \sqrt{\frac{9 - \sqrt{33}}{12}} \pi$, verso il basso per

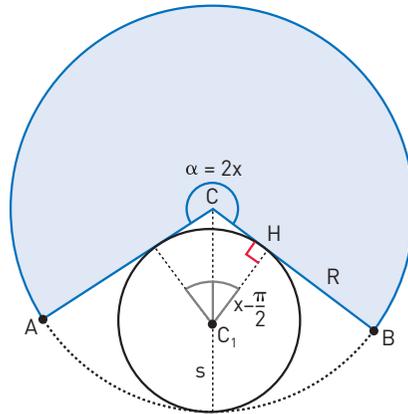
$$\sqrt{\frac{9 - \sqrt{33}}{12}} \pi < x < \pi.$$

Disegniamo il grafico di $V(x)$.



- d)** Per realizzare il disco di base occorre poter inscrivere nel settore circolare residuo una circonferenza la cui lunghezza sia almeno pari a quella della base del cono: poiché l'angolo al centro del settore residuo è acuto, il raggio della circonferenza inscritta in esso è strettamente minore della metà del raggio R e quindi la circonferenza corrispondente è strettamente minore di πR , mentre la lunghezza della circonferenza

di base del cono, che corrisponde alla lunghezza dell'arco sotteso dal settore utilizzato, è chiaramente superiore a πR , essendo $\alpha > \pi$.



- e) Consideriamo il triangolo rettangolo CC_1H in cui C è il centro del disco di raggio R , C_1 è il centro della circonferenza inscritta nel settore scartato, avente angolo al centro $2(\pi - x)$, e H è la proiezione di C_1 su un lato CB del settore.

Poiché $\overline{C_1H} = s$ e $\overline{CC_1} = R - s$, la semplice relazione trigonometrica

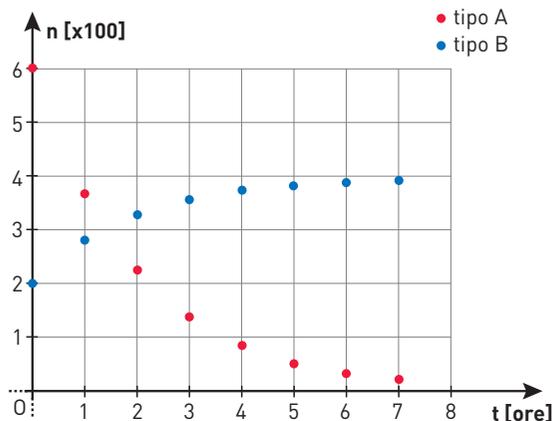
$$\overline{CC_1} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \overline{C_1H}$$

implica la relazione da dimostrare:

$$(R - s) \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = s \rightarrow R \sin x - s \sin x = s \rightarrow s(x) = \frac{R \sin x}{1 + \sin x}.$$

3 Un esperimento di microbiologia

Anna è ricercatrice in un laboratorio di microbiologia e sta eseguendo un'analisi comparata su due ceppi di una particolare specie batterica. In un esperimento recente ha osservato l'evoluzione della popolazione batterica in una coltura in cui convivevano entrambi i ceppi A e B . Dopo aver immesso nella coltura un certo numero iniziale di batteri dei due tipi, ha monitorato ogni ora il numero medio di batteri $n_A(t)$ e $n_B(t)$ ancora vivi. Il grafico sottostante riporta il risultato delle sue osservazioni.



Dalle osservazioni condotte, Anna ritiene di poter estrapolare due possibili modelli matematici per esprimere $n_A(t)$ e $n_B(t)$ in funzione del tempo:

$$n_A(t) = Ae^{-\frac{t}{2}}; \quad n_B(t) = C(1 - e^{-\frac{t}{2}}) + B.$$

- a)** Spiega perché le funzioni proposte da Anna sono plausibili e stabilisci quali valori siano da attribuire alle costanti A , B e C affinché tali funzioni riproducano al meglio le osservazioni sperimentali.
- b)** Dopo aver verificato che i valori suddetti sono $A = 600$, $B = 200$ e $C = 200$, studia e rappresenta in uno stesso diagramma le funzioni corrispondenti a tali valori, nell'intervallo $t \in [0; +\infty[$. Determina in particolare l'istante t_0 in cui le popolazioni dei due tipi di batteri sono ugualmente numerose.

In una variante dell'esperimento, a partire dalle stesse condizioni iniziali, giunti all'istante t_0 in cui le due popolazioni batteriche si trovano in equilibrio, Anna immette nella coltura un composto organico che ha l'effetto di stabilizzare i tassi istantanei di variazione $n'_A(t_0)$ e $n'_B(t_0)$ delle due popolazioni, e da quel momento i tassi di variazione restano costanti.

- c)** Dopo quanto tempo, a partire da t_0 , non ci saranno più batteri vivi del ceppo A ? Qual è il numero di batteri del ceppo B ancora vivi nell'istante t_1 in cui la popolazione A si estingue?
- d)** Riporta in un unico diagramma i grafici dei modelli funzionali di questo secondo esperimento nell'intervallo $[0; t_1]$.

In un terzo esperimento, relativo al solo ceppo batterico di tipo A , Anna modifica il genoma della popolazione batterica e ora il modello che ne descrive la crescita è il seguente:

$$N_A(t) = \frac{t}{2} \cdot n_A(t) + 300,$$

dove $n_A(t)$ è la funzione determinata al precedente punto **a**.

- e)** Dimostra che ora la popolazione batterica del ceppo A non rischia più l'estinzione e che esiste un istante in cui la sua numerosità è massima: ricava tale istante e il corrispondente valore massimo.

RISOLUZIONE

- a)** Indichiamo con $\bar{n}_A(t)$ i valori ricavabili dal grafico per la popolazione del ceppo A , in modo da distinguerli dai valori teorici predetti dal modello $n_A(t) = Ae^{-\frac{t}{2}}$. Opereremo in modo analogo per la popolazione del ceppo B .

Per quanto riguarda il ceppo di batteri di tipo A , osservando il grafico possiamo approssimativamente estrapolare la seguente successione di valori (in centinaia):

$$\begin{aligned} \bar{n}_A(0) &\simeq 6; & \bar{n}_A(1) &\simeq 3,65; & \bar{n}_A(2) &\simeq 2,25; & \bar{n}_A(3) &\simeq 1,35; \\ \bar{n}_A(4) &\simeq 0,8; & \bar{n}_A(5) &\simeq 0,5; & \bar{n}_A(6) &\simeq 0,3; & \bar{n}_A(7) &\simeq 0,2; \end{aligned}$$

da cui ricaviamo la seguente successione di rapporti tra un termine e il suo antecedente:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{n}_A(1)}{\bar{n}_A(0)} &\simeq 0,61; & \frac{\bar{n}_A(2)}{\bar{n}_A(1)} &\simeq 0,62; & \frac{\bar{n}_A(3)}{\bar{n}_A(2)} &\simeq 0,6; & \frac{\bar{n}_A(4)}{\bar{n}_A(3)} &\simeq 0,59; \\ \frac{\bar{n}_A(5)}{\bar{n}_A(4)} &\simeq 0,63; & \frac{\bar{n}_A(6)}{\bar{n}_A(5)} &\simeq 0,6; & \frac{\bar{n}_A(7)}{\bar{n}_A(6)} &\simeq 0,67. \end{aligned}$$

La successione $\bar{n}_A(t)$ così ricavata, con $t = 0, 1, 2, \dots$, è quindi approssimativamente una progressione geometrica di ragione circa uguale a $0,6$.

Il modello proposto per la funzione $n_A(t)$ è quindi plausibile, in quanto:

$$\frac{n_A(t+1)}{n_A(t)} = \frac{Ae^{-\frac{t+1}{2}}}{Ae^{-\frac{t}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,6.$$

Poiché inoltre dal grafico risulta $\bar{n}_A(0) = 600$, deve essere:

$$n_A(0) = Ae^{-\frac{0}{2}} = 600 \rightarrow A = 600.$$

Il modello per l'evoluzione della popolazione del ceppo A è quindi:

$$n_A(t) = 600e^{-\frac{t}{2}}.$$

Esaminiamo ora il modello proposto per la popolazione del ceppo B:

$$n_B(t) = C(1 - e^{-\frac{t}{2}}) + B = C - Ce^{-\frac{t}{2}} + B.$$

La funzione ha andamento asintotico, infatti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} n_B(t) = C + B,$$

e dal grafico possiamo ipotizzare che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{n}_B(t) = 400,$$

quindi possiamo affermare che:

$$C + B = 400.$$

Inoltre:

$$\bar{n}_B(0) = 200 \rightarrow n_B(0) = B = 200 \rightarrow C = 400 - 200 = 200.$$

Quindi, sulla base del primo valore $\bar{n}_B(0)$ e sull'andamento asintotico di $\bar{n}_B(t)$ possiamo supporre che sia:

$$n_B(t) = 400 - 200e^{-\frac{t}{2}}.$$

Valutiamo se i valori teorici di $n_B(t)$ approssimano bene anche gli altri valori sperimentali $\bar{n}_B(t)$ osservabili nel grafico.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$\bar{n}_B(t)$ (in centinaia)	2,00	2,80	3,25	3,50	3,60	3,75	3,85	3,90
$n_B(t)$ (in centinaia)	2,00	2,79	3,26	3,55	3,73	3,84	3,90	3,94
$\frac{\bar{n}_B(t)}{n_B(t)}$	1,00	1,00	1,00	0,98	0,97	0,98	0,99	1,00

Tutti i rapporti $\frac{\bar{n}_B(t)}{n_B(t)}$ sono molto vicini a 1, quindi la funzione trovata $n_B(t) = 400 - 200e^{-\frac{t}{2}}$ approssima molto bene i dati sperimentali.

b) Le funzioni trovate,

$$n_A(t) = 600e^{-\frac{t}{2}}, \quad n_B(t) = 400 - 200e^{-\frac{t}{2}},$$

sono entrambe definite, continue, derivabili e positive in tutto l'intervallo $t \in [0; +\infty[$.

Agli estremi del dominio abbiamo:

$$\begin{aligned} n_A(0) &= 600; & \lim_{t \rightarrow +\infty} n_A(t) &= 0; \\ n_B(0) &= 200; & \lim_{t \rightarrow +\infty} n_B(t) &= 400. \end{aligned}$$

Le derivate prime sono rispettivamente sempre negativa e sempre positiva, in accordo con la monotonia delle due funzioni:

$$n'_A(t) = -300e^{-\frac{t}{2}} < 0 \text{ per ogni } t \geq 0, \quad n_A(t) \text{ è strettamente decrescente};$$

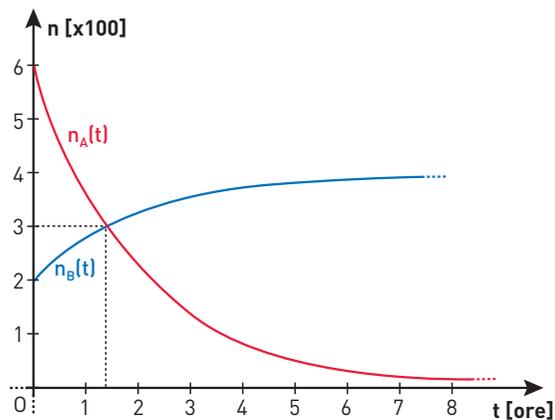
$$n'_B(t) = 100e^{-\frac{t}{2}} > 0 \text{ per ogni } t \geq 0, \quad n_B(t) \text{ è strettamente crescente}.$$

Le derivate seconde sono rispettivamente sempre positiva e sempre negativa, in accordo con la concavità delle due funzioni:

$$n''_A(t) = 150e^{-\frac{t}{2}} > 0 \text{ per ogni } t \geq 0, \quad n_A(t) \text{ volge la concavità verso l'alto};$$

$$n''_B(t) = -50e^{-\frac{t}{2}} < 0 \text{ per ogni } t \geq 0, \quad n_B(t) \text{ volge la concavità verso il basso}.$$

Disegniamo i grafici delle due funzioni in un unico riferimento cartesiano.



Per trovare il punto di intersezione delle due curve risolviamo l'equazione:

$$600e^{-\frac{t}{2}} = 400 - 200e^{-\frac{t}{2}} \rightarrow e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \rightarrow t = 2 \ln 2.$$

Le due popolazioni batteriche sono dunque in equilibrio numerico nell'istante:

$$t_0 = 2 \ln 2 \simeq 1,38 \rightarrow 1 \text{ h } 23 \text{ min}.$$

- c)** Come abbiamo appena calcolato, le due popolazioni sono in equilibrio numerico per $t_0 = 2 \ln 2$; da questo istante in poi, a causa dell'aggiunta al composto dello stabilizzatore, i tassi di variazione valgono rispettivamente:

$$n'_A(t_0) = -300e^{-\frac{2 \ln 2}{2}} = -150; \quad n'_B(t_0) = 100e^{-\frac{2 \ln 2}{2}} = 50.$$

La numerosità della popolazione del ceppo A, per $t > t_0$, è descritta dalla nuova funzione:

$$m_A(t) = n_A(t_0) + n'_A(t_0)(t - t_0) = 300(1 + \ln 2) - 150t.$$

Questa popolazione si estingue nell'istante t_1 tale che $m_A(t_1) = 0$:

$$300(1 + \ln 2) - 150t_1 = 0 \rightarrow t_1 = 2(1 + \ln 2) \simeq 3,39 \rightarrow t_1 \simeq 3 \text{ h } 23 \text{ min}.$$

La numerosità della popolazione del ceppo B, per $t > t_0$, è descritta invece dalla funzione:

$$m_B(t) = n_B(t_0) + n'_B(t_0)(t - t_0) = 100(3 - \ln 2) + 50t.$$

Nell'istante t_1 , la popolazione di batteri del ceppo B ha dunque la seguente numerosità:

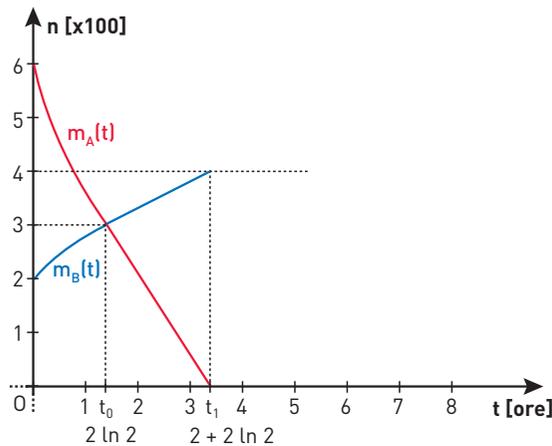
$$m_B(t_1) = 100(3 - \ln 2) + 50(2 + 2 \ln 2) = 400.$$

- d) Nell'intervallo $[0; t_1] = [0; 2 + 2 \ln 2]$ le funzioni che descrivono l'evoluzione delle due popolazioni batteriche sono dunque le seguenti:

$$m_A(t) = \begin{cases} 600e^{-\frac{t}{2}} & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \ln 2 \\ 300(1 + \ln 2) - 150t & \text{se } 2 \ln 2 < t \leq 2 + 2 \ln 2 \end{cases};$$

$$m_B(t) = \begin{cases} 400 - 200e^{-\frac{t}{2}} & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \ln 2 \\ 100(3 - \ln 2) + 50t & \text{se } 2 \ln 2 < t \leq 2 + 2 \ln 2 \end{cases}.$$

Possiamo allora disegnare subito i grafici delle due funzioni in un unico riferimento cartesiano, osservando che nell'intervallo $[0; t_0]$ le due curve coincidono con i grafici di $n_A(t)$ e di $n_B(t)$ disegnati prima, mentre nell'intervallo $[t_0; t_1]$ sono costituite da due segmenti.



- e) La funzione di crescita della popolazione batterica del nuovo ceppo modificato è la seguente:

$$N_A(t) = \frac{t}{2} n_A(t) + 300 = 300(te^{-\frac{t}{2}} + 1).$$

La funzione è definita, continua, derivabile e positiva in tutto l'intervallo $[0; +\infty[$. Poiché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N_A(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 300(te^{-\frac{t}{2}} + 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 300\left(\frac{t}{e^{\frac{t}{2}}} + 1\right) = 300,$$

la popolazione batterica del ceppo A modificato tende a stabilizzarsi al valore 300 e non si estinguerà. Inoltre

$$N'_A(t) = 300e^{-\frac{t}{2}} - 150te^{-\frac{t}{2}} = 150e^{-\frac{t}{2}}(2 - t),$$

$$N'_A(t) = 0 \rightarrow 150e^{-\frac{t}{2}}(2 - t) = 0 \rightarrow t = 2,$$

$$N'_A(t) > 0 \text{ per } 0 \leq t < 2 \text{ e } N'_A(t) < 0 \text{ per } t > 2,$$

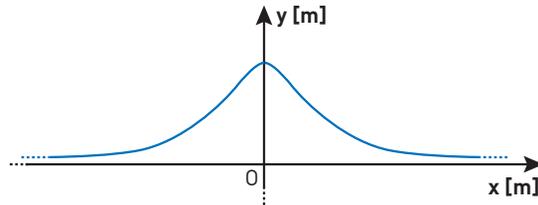
quindi per $t = 2$ ore si ha un massimo relativo nella numerosità della popolazione, con:

$$N_A(2) = 300\left(\frac{2}{e} + 1\right) \simeq 521.$$

Tale massimo è assoluto, poiché $N_A(0) = 30$ e $t = 300$ è asintoto orizzontale per la funzione N_A .

4 Un tunnel impegnativo

Un gruppo di ingegneri civili è al lavoro per realizzare una condotta idraulica. Per questo scopo si rende necessario lo scavo di un tunnel sotto a un terrapieno, la cui sezione trasversale è rappresentata dal grafico sottostante; l'asse x rappresenta il piano orizzontale, l'asse y la direzione verticale e l'unità di misura su entrambi gli assi è il metro.

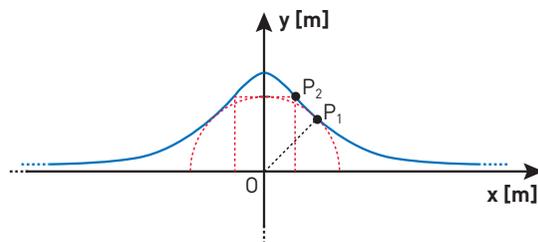


- a)** Quale fra questi due tipi di funzione ritieni che sia stato scelto dal gruppo di ingegneri per meglio rappresentare il profilo del terrapieno? Motiva la tua risposta.

$$y_1(x) = \frac{x^2 + A}{1 + x^2}, \quad y_2(x) = \frac{A}{1 + x^2}.$$

- b)** Appurato che la scelta è ricaduta su una funzione del secondo tipo, dimostra che deve essere $A = 2$ affinché i punti di massima pendenza (in valore assoluto) del profilo del terrapieno si trovino a un'altezza di 1,5 m dal livello del suolo. Studia e rappresenta la funzione così determinata.

Per quanto riguarda la realizzazione del tunnel della condotta, nel gruppo di ingegneri emergono due progetti alternativi. Il primo prevede un tunnel a sezione semicircolare, e per massimizzare l'area della sezione si deve determinare il punto P_1 del profilo del terrapieno che si trova alla minima distanza dal centro O della sezione. Il secondo progetto prevede un tunnel a sezione rettangolare, determinato dal punto P_2 del profilo che definisce il rettangolo inscritto di area massima.



- c)** Ricava P_1 e P_2 e dimostra che il secondo progetto è comunque da scartare se si vuole ottimizzare la portata della condotta.
- d)** Ricava la portata massima, in litri/secondo, delle due possibili condotte, supponendo che la sezione della tubatura coincida con quella del tunnel e che l'acqua vi scorra a una velocità uniforme e costante di 2 m/s.
- e)** Dimostra che sarebbe possibile realizzare una condotta completamente interrata di portata ancora maggiore se la sezione fosse un triangolo isoscele rettangolo con l'ipotenusa sull'asse delle ascisse. Calcola anche in questo caso la portata massima, nelle stesse condizioni precedenti.

RISOLUZIONE

a) Entrambe le funzioni proposte sono simmetriche rispetto all'asse y e sempre positive se $A > 0$, ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + A}{1 + x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + x^2} = 0,$$

per cui solo la seconda può adattarsi al grafico che rappresenta il profilo del terrapieno.

Per essere certi che la seconda funzione rappresenti bene il profilo del terrapieno, studiamo la derivata prima e la derivata seconda di y_2 .

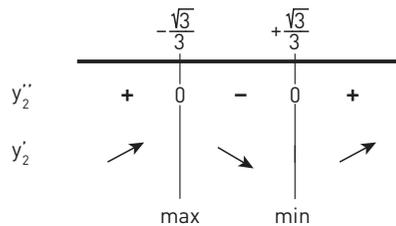
La derivata prima

$$y_2'(x) = \frac{-2Ax}{(1+x^2)^2}$$

si annulla in $x = 0$, è positiva per $x < 0$ ed è negativa per $x > 0$. Quindi $x = 0$ è punto di massimo relativo ed è anche punto di massimo assoluto di coordinate $M(0; A)$.

Calcoliamo la derivata seconda e studiamo il suo segno.

$$y_2''(x) = \frac{2A(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3}$$



La derivata seconda si annulla in $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ e

$$y_2\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{A}{1 + \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}A.$$

Quindi $F_{1,2}\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}A\right)$ sono punti di flesso di y_2 a tangente obliqua.

Effettivamente y_2 ben rappresenta il profilo del terrapieno.

b) I punti di massima pendenza del grafico della funzione $y_2(x) = \frac{A}{1+x^2}$ sono i punti in cui la derivata prima ha massimo valore assoluto.

La derivata prima raggiunge il massimo (in valore assoluto) nei punti dove la derivata seconda si annulla, cambiando di segno in un loro intorno.

I punti di massima pendenza del grafico di $y_2(x)$ hanno ascissa $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ e corrispondono ai punti di flesso $F_{1,2}$ già trovati. In tali punti i punti del grafico devono trovarsi a un'altezza di 1,5 m, quindi:

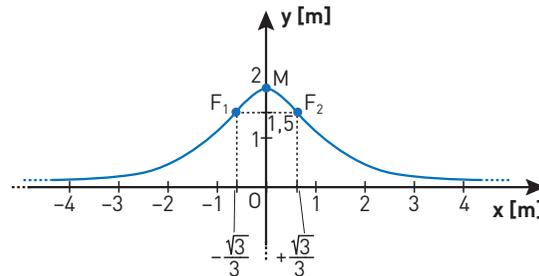
$$y_2\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1,5 \rightarrow \frac{3A}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow A = 2.$$

La funzione che descrive il profilo del terrapieno è dunque:

$$y(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

Il grafico della funzione è simile a quello dato nel testo dell'esercizio, ma ora precisiamo le coordinate dei suoi punti notevoli:

$$M(0; y(0)) = M(0; 2); \quad F_{1,2}\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}; y\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = F_{1,2}\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{2}\right).$$



Di questa funzione abbiamo già rilevato la simmetria, la positività e il fatto che sia infinitesima per x che tende a infinito, così come abbiamo già calcolato la derivata prima e seconda, nonché il valore di massimo, relativo e assoluto, in corrispondenza dell'origine e i due punti di flesso obliquo:

$$M(0; 2), \quad F_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{2}\right), \quad F_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{2}\right).$$

- c)** Per ricavare $P_1\left(x; \frac{2}{1+x^2}\right)$ dobbiamo minimizzare la distanza $\overline{OP_1}$, cioè la funzione

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \frac{4}{(1+x^2)^2}}, \text{ con } x \neq 0;$$

dal momento che si tratta di una quantità positiva, è equivalente minimizzare il suo quadrato:

$$D(x) = d(x)^2 = x^2 + \frac{4}{(1+x^2)^2}.$$

Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno (per la simmetria di y_2 possiamo considerare $x > 0$):

$$D'(x) = 2x - \frac{16x}{(1+x^2)^3} = \frac{2x[(1+x^2)^3 - 8]}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(1+x^2-2)[(1+x^2)^2 + 2(1+x^2) + 4]}{(1+x^2)^3}.$$

Il segno di $D'(x)$ è individuato dal segno del fattore $(1+x^2) - 2 = x^2 - 1$, quindi è positivo per $x > 1$ e negativo per $0 < x < 1$. Per la simmetria di y_2 i punti estremanti di $D(x)$, e quindi di $d(x)$, sono $x = \pm 1$, in corrispondenza dei quali:

$$d(\pm 1) = \sqrt{1^2 + \frac{4}{(1+1^2)^2}} = \sqrt{2}.$$

Il punto P_1 cercato ha coordinate $P_1(1; y(1)) = (1; 1)$ ed è $\overline{OP_1} = \sqrt{2}$. A tale distanza minima corrisponde la massima sezione semicircolare possibile, la cui area è $S_1 = \pi \text{ m}^2$.

Per ricavare $P_2\left(x; \frac{2}{1+x^2}\right)$ dobbiamo invece massimizzare il prodotto

$$p(x) = \frac{2x}{1+x^2},$$

che rappresenta la semiarea del rettangolo inscritto tra la curva e l'asse x . Procedendo come prima, otteniamo:

$$p'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

da cui deduciamo che $p'(x) > 0$ per $|x| < 1$ e $p'(x) < 0$ per $|x| > 1$. Il punto cercato è $P_2(1; 1)$ e in corrispondenza di tale punto si realizza la massima sezione rettangolare possibile, a cui corrisponde una sezione di area $S_2 = 2 \text{ m}^2$.

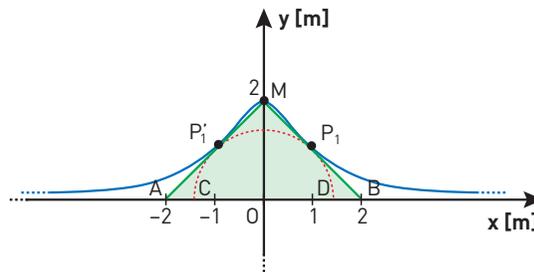
Poiché $S_2 < S_1$, per massimizzare l'area della sezione del tunnel occorrerà realizzare il primo progetto.

- d) Le portate massime delle due condotte, espresse in litri/secondo e supposto che l'acqua abbia una velocità uniforme e costante di 2 m/s, sono:

$$p_1 = v \cdot S_1 = 2\pi \rightarrow p_1 \simeq 6,283 \text{ m}^3/\text{s} = 6283 \text{ L/s};$$

$$p_2 = v \cdot S_2 = 4 \rightarrow p_2 = 4 \text{ m}^3/\text{s} = 4000 \text{ L/s}.$$

- e) Disegniamo il triangolo isoscele rettangolo avente come vertice il punto di massimo $M(0; 2)$, ipotenusa sull'asse x e lati obliqui passanti per i punti di minima distanza da O , cioè $P_1(1; 1)$ e $P_1'(-1; 1)$.



I lati obliqui MA e MB del triangolo, rispettivamente di pendenza $1 = y'(-1)$ e $-1 = y'(1)$, risultano tangenti alla curva in $P_1'(-1; 1)$ e $P_1(1; 1)$; in tali punti la funzione volge la concavità verso l'alto e perciò rimane localmente tutta al di sopra delle tangenti MA e MB .

Per quanto detto sulla pendenza dei segmenti, è anche $MA \perp MB$ e quindi il triangolo ABM è rettangolo. I vertici A e B hanno coordinate $A(-2; 0)$ e $B(2; 0)$, quindi il triangolo ABM ha area $S_3 = 4 \text{ m}^2$, per una portata massima che risulta così superiore alle precedenti:

$$p_3 = v \cdot S_3 = 8 \rightarrow p_3 = 8 \text{ m}^3/\text{s} = 8000 \text{ L/s}.$$

Osserviamo che gli altri triangoli ABN , con A e B sull'asse delle ascisse, N sull'asse delle ordinate e AN e BN tangenti al grafico di $y(x)$, non sono rettangoli, in quanto non risulterebbe $AN \perp BN$.