Concorso MaddMaths!

“Inventa la tua prova di matematica”

Risultati, giudizi e prove

marzo 2015

MaddMaths!
MAtematica Divulgazione Didattica

Risultati del concorso MaddMaths! “Inventa la tua prova di matematica per la Maturità”

Pubblichiamo i risultati del concorso MaddMaths! “Inventa la tua prova di matematica per la Maturità”. Il concorso, bandito nello scorso mese di giugno sulle pagine del sito di divulgazione MaddMaths!, ha visto una partecipazione abbastanza esigua di proposte (soltanto nove), tutte però molto qualificate sotto il punto di vista didattico.

L'esigenza di bandire il concorso nasceva dal fatto che ogni anno la prova di matematica assegnata ai maturandi dei Licei Scientifici fa discutere sia chi vive all'interno del mondo della scuola sia chi opera in contesti non prettamente scolastici (ma che di matematica, ovviamente, se ne intende), sia gli stessi maturandi. Una delle obiezioni spesso sollevate è che l'immagine della matematica che emerge dai quesiti proposti risulta il più delle volte scoraggiante e molto lontana da un'idea moderna di questa disciplina. Molti auspicano il rilancio di una matematica meno gratuita, con un maggior uso della fantasia, o anche solo più appassionante.

La redazione MaddMaths! ha voluto farsi interprete, in senso costruttivo, di queste istanze invitando tutti gli interessati a formulare proposte di prove coerenti con le Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici. La giuria, composta da tre esperti esterni, Adriana Lanza, Giuliana Massotti, Lorenzo Mazza, e coordinata dal sottoscritto, ha valutato gli elaborati pervenuti, sulla base di alcuni criteri fondamentali:

- Originalità e creatività

- Valorizzazione dell'immagine della matematica

- Coerenza con le Indicazioni Nazionali

La classifica stilata dalla giuria è risultata essere la seguente:

1. **Lorenzo Meneghini** (NB: Lorenzo Meneghini ha presentato due elaborati distinti, qui prendiamo in esame quello più classico con due problemi e dieci quesiti).
2. **Claudia Zampolini**
3. **Francesco Daddi**

Per i migliori esercizi o quesiti, la giuria segnala il **Problema 2 di Lorenzo Meneghini (primo elaborato) e Problema 8 di Claudia Zampolini.**

Nel seguito trovate il giudizio analitico della giuria e tutti gli elaborati proposti, che verranno sottoposti all'attenzione del Ministro dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca.

Roberto Natalini

CONCORSO MaddMaths!

"Inventa la tua prova di matematica per la Maturità"

Relazione della giuria

Composizione della giuria: Adriana Lanza, Giuliana Massotti, Lorenzo Mazza

Coordinatore dei lavori: Roberto Natalini

Riflessioni e giudizio globale sugli elaborati

Le prove esaminate sono quasi tutte degne di nota soprattutto per creatività. Nella maggior parte degli elaborati proposti dai concorrenti è stata adottata la struttura conforme alle norme vigenti (scelta di uno tra due problemi proposti e di cinque quesiti tra i dieci proposti), probabilmente perché è stata in tal senso interpretata la condizione del bando del concorso

"La prova dovrà essere appropriata per un esame di maturità nella forma e nei contenuti e assolutamente coerente con le Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici"

Le proposte di struttura alternativa , pur degne di attenzione, non sono apparse del tutto convincenti o perché non era ben chiaro se e come fosse data al candidato l'opzione di scelta, o, al contrario, perché le modalità di scelta dei quesiti proposti appariva troppo minuziosa e dispersiva.

Maggiore interesse suscitano le tracce dei singoli quesiti, sia tra le proposte giudicate globalmente migliori, sia tra quelle ritenute meno convincenti.

La loro lettura può fornire molti spunti per la formulazione di tracce d'esame, ma anche di prove da somministrare <<in itinere>> alle classi di liceo scientifico (non solo alle quinte), compatibilmente con gli obiettivi formativi raggiunti.

I contenuti sono per lo più coerenti con le Indicazioni nazionali per i licei scientifici. L'invito all'approccio didattico basato sulla modellizzazione è stato visto sia come risoluzione di problemi contestualizzati, sia sul piano dell'astrazione e della sintesi formale. Non mancano quesiti le cui risposte richiedono, oltre che conoscenze adeguate, creatività o duttilità applicativa. È apparsa inoltre evidente, nella maggior parte delle proposte, l'esigenza di conciliare la presenza di tracce innovative nei contenuti e/o nella formulazione, con la proposta di problemi o quesiti di taglio tradizionale, di stampo più classico anche rispetto alle più recenti prove d'esame.

Tale esigenza è probabilmente dettata da un atteggiamento rispettoso della diversità dei percorsi didattici dei docenti e della personalità degli studenti.

Giudizi sugli elaborati giudicati migliori

1. Lorenzo Meneghini (NB: Lorenzo Meneghini ha presentato due elaborati distinti, qui prendiamo in esame quello più classico con due problemi e dieci quesiti).

Prova ben strutturata e calibrata, compaiono esercizi sui nuovi argomenti introdotti dalle recenti indicazioni ministeriali, altri con un taglio più concreto e reale e altri ancora più standard. Un testo globalmente gradevole e appropriato quale possibile proposta per una maturità scientifica.

Formulazione chiara e corretta. Varietà nei contenuti e nella tipologia delle tracce; non mancano i riferimenti al reale e il collegamento con la fisica. Sono presenti elementi innovativi nel problema 2, nel quale ben si collegano richieste tradizionali come il calcolo di volumi con richieste su argomenti di recente introduzione come la distribuzione di probabilità e l'uso consapevole della calcolatrice.

2. Claudia Zampolini

Problemi interessanti perché creativi e che presentano una buona immagine della matematica. Struttura innovativa abbastanza appropriata, viene infatti richiesto di risolvere 4 problemi sugli otto presenti e 5 quesiti sui 10 proposti, con una durata di 5 ore la possibilità di usare la calcolatrice grafica, anche se la proposta di somministrare tracce piuttosto brevi, aumentandone il numero, rischia di disorientare lo studente e rende meno agevole la valutazione e la comparazione dei risultati. Contenuti significativi coerenti con gli OSA delle Indicazioni Nazionali. Quasi tutte le tracce , dei quesiti e dei problemi, favoriscono un approccio risolutivo basato sulla modellizzazione e sulla progettualità. Rispetta i procedimenti e i metodi caratteristici del pensiero matematico (congetturare, dedurre, dimostrare, argomentare) e valorizza l'immagine della matematica quale strumento versatile e flessibile per interpretare la realtà .

3. Francesco Daddi

Struttura innovativa non molto appropriata : eccessivo il numero di tracce proposte (2 problemi, 4 quesiti e 8 esercizi su 18 proposti) e poco agevoli le condizioni di scelta. La formulazione è generalmente chiara e si nota una buona varietà nella tipologia dei quesiti. Contenuti significativi e per lo più coerenti con gli OSA delle Indicazioni Nazionali Sono presenti elementi di originalità o creatività negli esercizi 4 e 15, degno di nota l'esercizio 9 sui numeri complessi. Valorizza l'immagine della matematica nei suoi procedimenti e metodi caratteristici (congetturare, dedurre, dimostrare, argomentare) con qualche spunto per un approccio alla modellizzazione.

Migliori Esercizi: Problema 2 in Meneghini (primo elaborato) e Problema 8 in Zampolini

Problema 2 - Meneghini1

Il problema, strutturato in modo tradizionale, presenta alcuni aspetti interessanti per la flessibilità con cui viene proposto lo studio della famiglia di funzioni, approccio che richiede una gestione attenta e consapevole delle variabili. Apprezzabile , nella seconda parte, la proposta di una serie di domande la cui risposta esige un utilizzo personalizzato degli strumenti di calcolo.

Problema 8 – Zampolini

È un buon esempio di problema a carattere interdisciplinare. Punto di partenza è un grafico che richiama i risultati di un esperimento di laboratorio. Valida la scelta del fenomeno del raffreddamento , familiare a tutti, e opportuna la nota con cui si fornisce il supporto teorico necessario per la costruzione del modello matematico ma anche per verificare eventuali congetture circa la natura del grafico. Le domande mirano a testare la capacità di interpretare un grafico e trarne informazioni di tipo qualitativo e quantitativo ma anche la conoscenza dei contenuti e dei metodi dell' Analisi.

Concorso "Inventa la tua prova di matematica"

Primo classificato: Lorenzo Meneghini

MaddMaths!
MAtematica Divulgazione Didattica

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema cartesiano O*xy*, si consideri la funzione $f\left(x\right)=\dfrac{1+x^2}{x^2}$.

a) Determinare l'espressione della primitiva $F\left(x\right)$, che assume lo stesso valore di $f\left(x\right)$ per $x=-1$. Indicato con A tale punto comune ai grafici delle due funzioni, verificare che essi si intersecano anche in un altro punto B, determinandolo.
b) Si studino le due funzioni $\gamma : y=f\left(x\right)$ e $\Gamma : y=F\left(x\right)$ e se ne disegnino i grafici rispetto al riferimento dato, calcolando inoltre le equazioni delle rispettive tangenti nei punti A e B.
c) Detta R la regione di piano racchiusa dalle due curve e dalla retta $x = -2$, calcolare i volumi W_x e W_y dei solidi ottenuti dalla rotazione di R rispetto a ciascuno degli assi cartesiani.
d) Si calcoli l'area della regione S appartenente al primo quadrante, delimitata dalla retta $x = 1$, dalla curva γ e dal suo asintoto orizzontale.

PROBLEMA 2

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n\left(x\right)=\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$, definite nell'intervallo $I=\left[0,+\infty\right)$, in cui n è un numero naturale.

1. Si dimostri che ciascuna di tali funzioni ha un punto di massimo di ascissa $x = n$ ed ammette l'asse x come asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.
2. Per $n = 2$, si indichi con R la porzione di piano delimitata dal grafico di $f_2\left(x\right)$, dall'asse x e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$. R è la base di un solido W le cui sezioni con piani ortogonali all'asse x sono rettangoli di altezza $h\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$. Si calcoli il volume di W.

Il *periodo di vita* (in giorni) delle particelle emesse da una certa sostanza radioattiva è una v.c. di Poisson X di media $\lambda = 2$, la cui distribuzione di probabilità è

$$P\left(n\right)=f_n\left(2\right) \qquad \text{per } n = 0, 1, 2, \ldots$$

3. Costruire la tabella di distribuzione della v.c. X per tutti i valori di n la cui probabilità sia non inferiore a 10^{-4} e calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
   E_1: il periodo di vita delle particelle è non inferiore a 2 giorni
   E_2: il periodo di vita delle particelle è superiore a 5 giorni
   E_3: il periodo di vita delle particelle varia da 1 a 3 giorni
4. Detto E_n l'evento *"il periodo di vita delle particelle è minore di n giorni"*, determinare il minimo valore di n tale che $P\left(E_n\right)>0,8$

QUESTIONARIO

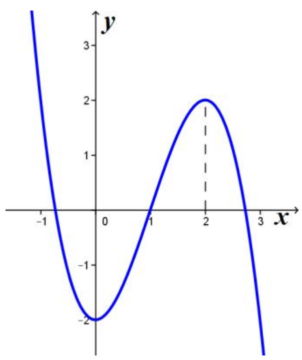
1. Dimostrare che se *a, b, c* sono tre interi consecutivi allora $a^3 + b^3 + c^3$ è multiplo di 9.
2. In un trapezio isoscele una diagonale è lunga 22 cm; si sa inoltre che tale diagonale forma un angolo di 45° con la base maggiore. Calcolare l'area del trapezio. Dire, inoltre, se tra i trapezi con tali caratteristiche ce n'è uno circoscritto ad una circonferenza.
3. Un paziente si rivolge al proprio medico perché da alcuni giorni ha la febbre alta e presenta macchie rosse diffuse su tutto il corpo (evento S). Le possibili cause di tali sintomi possono essere ricondotte esclusivamente a tre differenti malattie, indicati sinteticamente con M_1, M_2 e M_3. Gli studi epidemiologici di questo periodo dell'anno forniscono la seguente tabella, che riporta la frequenza di casi osservati:

M_1	M_2	M_3
45 %	35 %	20 %

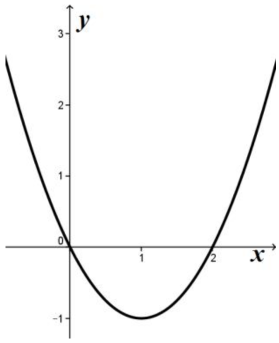
È noto, inoltre, dalla letteratura scientifica che data una certa malattia, la probabilità che un individuo ha di sviluppare i sintomi S è rispettivamente $P(S \mid M_1) = 0,25$, $P(S \mid M_2) = 0,6$ e $P(S \mid M_3) = 0,9$. Quale sarà la diagnosi del medico?

4. In un parallelepipedo rettangolo, la lunghezza della diagonale è $\sqrt{189}\,cm$ e la superficie totale misura 252 cm^2. Sapendo che i lati formano una progressione geometrica, determina il volume del solido.
5. Calcolare i seguenti limiti, motivando opportunamente i passaggi svolti:

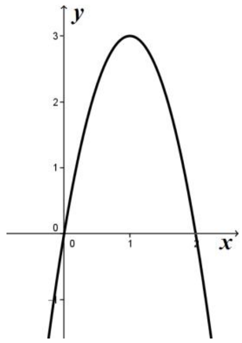
   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)+\ln(1-x)}{\cos x - 1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x (1-e^{-t})dt}{\operatorname{sen}^2 x}$
6. Delle funzioni $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ e $g(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$ una non verifica nell'intervallo $[-1,2]$ tutte le ipotesi del Teorema di Lagrange. Si indichi per quale delle due questo avviene e si giustifichi l'affermazione. Determinare, inoltre, per l'altra funzione i valori della variabile indipendente la cui esistenza è garantita dal teorema stesso.
7. Nello spazio, riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali O*xyz*, si considerino le sfere $S_1 : (x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5$ e $S_2 : (x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 25$.
   Si intersechino le due superficie, verificando che i loro punti comuni giacciono su una circonferenza γ appartenente ad un piano α passante per l'origine O del riferimento, e si dimostri che la retta congiungente i centri delle due sfere è ortogonale al piano α e passa per il punto $P\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)$.
8. Un punto materiale di massa *m* è vincolato a muoversi lungo l'asse *x* sotto l'azione di una forza. Sapendo che la sua legge oraria è $x(t) = 4\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)$, si determini l'istante in cui tale forza raggiunge la sua massima intensità.
9. Determinare, tra i coni circolari retti circoscritti alla sfera di raggio *r* = 1 dm, quello per cui è minima la superficie laterale. Calcolare il volume (in litri) di tale cono.
10. Si consideri la funzione $y = f(x)$ il cui grafico è rappresentato in figura.



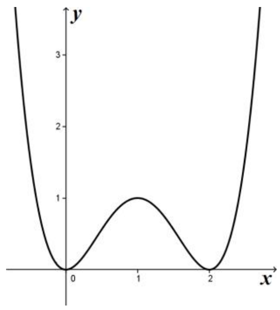
Quale dei seguenti grafici può rappresentare l'andamento della sua derivata prima $y = f'(x)$? Si motivi esaurientemente la risposta.



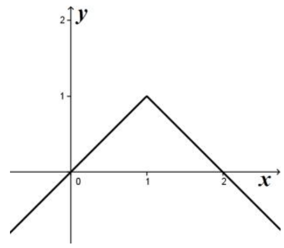
(a)



(b)



(c)



(d)

Concorso “Inventa la tua prova di matematica”

Seconda classificata: Claudia Zampolini

MaddMaths!
MAtematica Divulgazione Didattica

Prova elaborata da Claudia Zampolini per il concorso

"Inventa la tua prova di matematica per la Maturità"

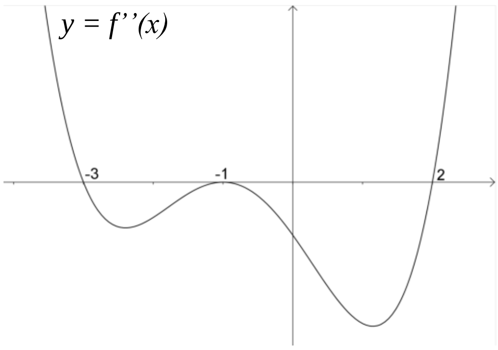
Risolvi, esponendo in modo sintetico il procedimento seguito, 5 dei seguenti 10 quesiti. Ciascun quesito vale 10 punti.

Quesito 1
Trova il volume del tetraedro di vertici O(0,0,0), A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,4)l e l'equazione del piano individuato dai punti A,B e C.

Quesito 2
Nel 1980 in Italia c'è stata l'inflazione più alta della storia recente: il 21,1 % annuo. Calcola con tre cifre significative la percentuale di inflazione media mensile.

Quesito 3
La legge oraria di un moto rettilineo è $s(t) = t^3 + 3t$ (le grandezze sono espresse nelle unità del S.I.). Calcola la velocità media nell'intervallo di tempo [1s,10s] e trova l'istante in cui il corpo possedeva tale velocità media.

Quesito 4
Il grafico a fianco è quello della derivata seconda della funzione $y = f(x)$.
Individua, dando una breve spiegazione, gli eventuali punti di flesso



Quesito 5
Il lato di un quadrato, che inizialmente misurava 10 cm, inizia ad aumentare con una velocità costante di 1 cm/s. Con quale velocità aumenta la superficie dopo 10 secondi?

Quesito 6
Dimostra che non esiste alcun numero naturale *n* tale che $n^2 + 1$ sia divisibile per 3.

Quesito 7
La spirale di Archimede è così definita: "*Luogo piano descritto da un punto che, partendo dall'estremo di una semiretta, si sposta uniformemente lungo la semiretta mentre essa ruota uniformemente intorno al suo estremo".* Trova l'equazione in coordinate polari della spirale di Archimede sapendo che il punto che descrive il luogo si muove con velocità costante *v* lungo la semiretta e che questa ruota in senso antiorario con velocità angolare ω.

Quesito 8
Per quale valore di k il seguente numero $\frac{5^{24+2k} \cdot 6^{45+k}}{2^{21-k}}$ finisce con 100 zeri?

Quesito 9
Dimostra applicando il principio di induzione la seguente proprietà $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots\ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Quesito 10
Calcola il seguente integrale definito $\int_{-2}^{2} \left| x^2 - 1 \right| dx$

Risolvi 4 dei seguenti 8 problemi esponendo e motivando in modo chiaro ed esauriente il procedimento seguito e riportando tutti i calcoli effettuati. Ciascun problema vale 25 punti.

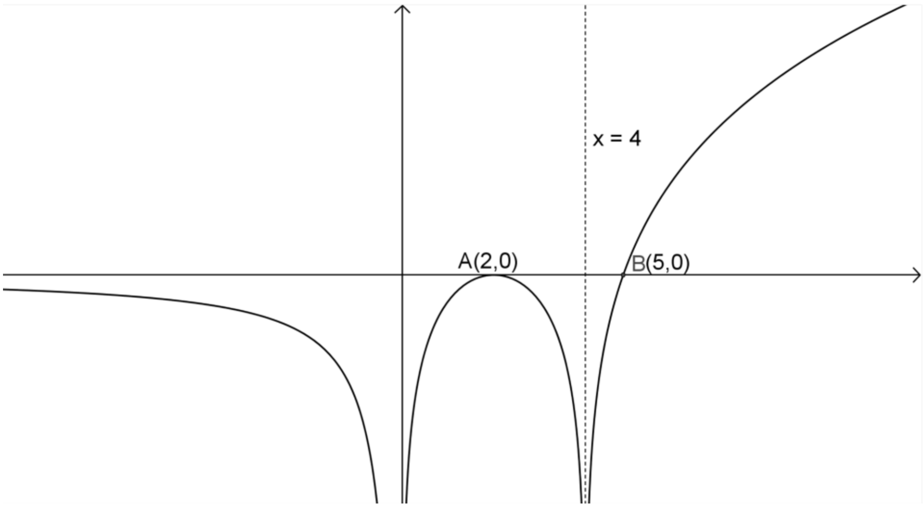
Problema 1
In un'azienda le spese di produzione di un bene si suddividono in spese fisse di 1800 euro mensili più un costo di 7 euro per ogni unità prodotta, e in spese di manutenzione degli impianti pari al 5‰ (5 per mille) del quadrato della quantità prodotta. Il prezzo di vendita è di 25 euro per unità prodotta. Disegna il grafico della funzione Guadagno e calcola per quale quantità si realizza il massimo guadagno. Individua le condizioni da porre sul numero di unità prodotte affinché l'azienda non vada in perdita.

Problema 2
La macchina A sta inseguendo, alla velocità di 120 km/h, la macchina B che sta andando a 90 km/h e che la precede di 2 km. L'autista della macchina B si accorge di essere inseguito quando A è a 400 m di distanza e inizia ad accelerare con $a = 4\ m/s^2$. Riuscirà a sfuggire all'inseguitore? Scrivi le leggi orarie delle due auto scegliendo come origine della traiettoria il punto in cui si trova A all'inizio dell'inseguimento e riporta nello stesso piano i rispettivi diagrammi orari.

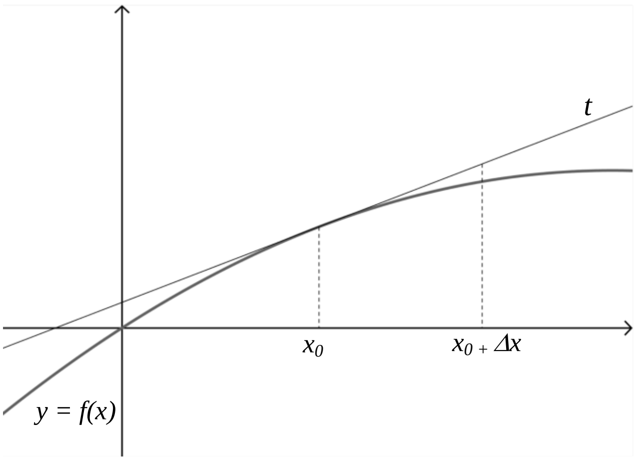
Problema 3
A fianco è riportato il grafico della funzione

$$g(x)=\ln(f(x))$$

Elenca tutte le informazioni che puoi ricavare sulla funzione $f(x)$ e disegna una bozza del grafico.

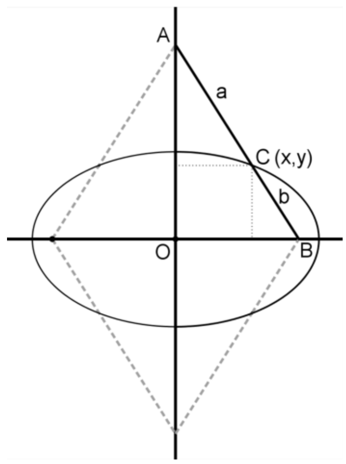


Problema 4
Alla scuola media per calcolare l'apotema di un poligono regolare di n lati dovevi consultare la tabella dei numeri fissi per poi applicare la seguente formula: *apotema = numero fisso x lato*. Dopo aver definito l'apotema di un poligono regolare descrivi, sfruttando le tue attuali conoscenze di trigonometria, il procedimento per trovare il numero fisso e calcola con 3 cifre decimali quello per il poligono regolare di 8 lati.



Problema 5
In mancanza di una calcolatrice si può approssimare il valore che una funzione, continua e derivabile, di equazione nota $y = f(x)$ assume nel punto $x = x_0+\Delta x$ con il valore che in tale punto assume la tangente *t* alla curva nel punto di ascissa x_0. Applica questo metodo di approssimazione per calcolare $e^{0,123}$ e, dopo aver trovato con la calcolatrice il valore con 3 cifre decimali, calcola la percentuale di errore.

Problema 6
Il compasso ellittico è uno strumento meccanico che permette di disegnare ellissi. Consiste in una barretta di lunghezza a+b le cui estremità sono vincolate a scorrere su due rette perpendicolari (vedi figura). Dimostra che il punto C che divide la barretta nei due segmenti di lunghezza a e b descrive un'ellisse



Problema 7

La tariffa oraria (o frazioni di ora) di un parcheggio a pagamento è di 1,50 euro, la multa prevista è di 60 euro. Sapendo che la maggior parte delle macchine fa una sosta di circa 45 minuti, con quale frequenza minima dovrebbe passare il vigile urbano affinché a lungo andare non sia vantaggioso per un utente abituale non pagare il tagliando?

Problema 8

Nel grafico sotto è riportata la temperatura di una tazza di caffè, lasciata raffreddare in un ambiente a temperatura costante. I dati raccolti permettono di affermare che la temperatura segue la legge di Newton*.

Usando i dati che puoi ricavare dal grafico trova:

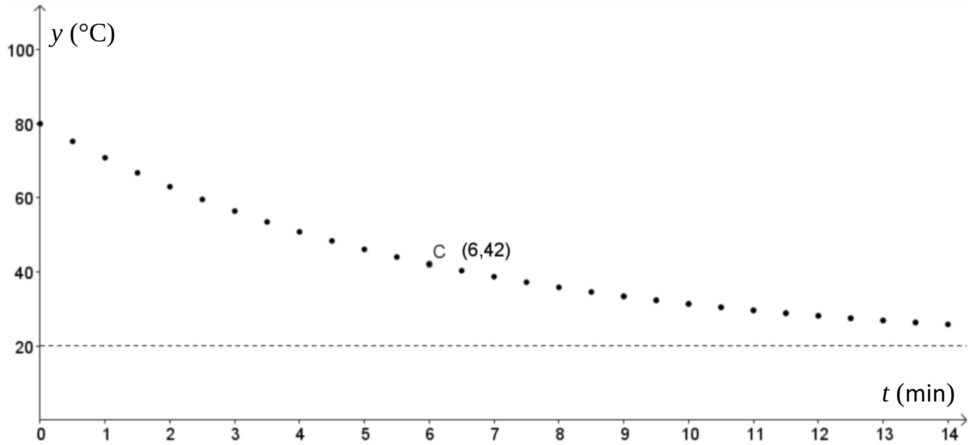
a) la temperatura iniziale del caffè

b) la temperatura ambiente

c) l'equazione differenziale che deve essere soddisfatta dalla funzione *y(t)* che esprime la temperatura del caffè in funzione del tempo

c) l'espressione analitica della funzione $y=y(t)$

* Legge di raffreddamento di Newton: la velocità con cui si raffredda un corpo che si trova in un ambiente, la cui temperatura T_A è mantenuta costante, è direttamente proporzionale alla differenza tra T_A e la temperatura del corpo, la costante k è detta costante di raffreddamento.



Durata massima della prova: 5 ore.

E' consentito l'uso della calcolatrice grafica.

Concorso "Inventa la tua prova di matematica"

Terzo classificato: Francesco Daddi

MaddMaths!
MAtematica Divulgazione Didattica

Proposta di Francesco Daddi

www.webalice.it/francesco.daddi

francesco.daddi@libero.it

Il candidato deve svolgere tutti i quesiti, il problema 1 (*Funzioni*) ed il problema 2 (*Geometria analitica nello spazio*). Tra gli esercizi dovrà sceglierne 3 tra quelli della categoria *Funzioni*, 1 tra quelli della categoria *Equazioni differenziali*, 1 tra quelli della categoria *Numeri complessi*, 1 tra quelli della categoria *Geometria analitica nello spazio*, 1 tra quelli della categoria *Calcolo delle probabilità e statistica*, 1 tra quelli della categoria *Varie*.

Funzioni

Quesito 1. Di una funzione sappiamo che $f(3)=1$, $f'(3)=-2$, $f''(3)=0$, $f'''(3)=5$. Cosa possiamo affermare?

$\boxed{\text{A}}$ $f(x)$ presenta un punto di minimo in $x_0=3$

$\boxed{\text{B}}$ $f(x)$ presenta un flesso ascendente a tangente obliqua in $x_0=3$

$\boxed{\text{C}}$ $f(x)$ presenta un flesso discendente a tangente obliqua in $x_0=3$

$\boxed{\text{D}}$ $f(x)$ presenta un punto di massimo in $x_0=3$

$\boxed{\text{E}}$ $f(x)$ presenta un flesso discendente a tangente orizzontale in $x_0=3$ $\boxed{\text{F}}$ N. P.

Quesito 2. Di una funzione $f(x)$ sappiamo che $f(2)=3$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)=8$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)=3$, $\lim_{x\to 2^-} f'(x)=5$, $\lim_{x\to 2^+} f'(x)=5$; la funzione è derivabile in $x_0=2$?

$\boxed{\text{A}}$ sì, e risulta $f'(2)=3$ $\boxed{\text{B}}$ no $\boxed{\text{C}}$ sì, e risulta $f'(2)=5$

$\boxed{\text{D}}$ mancano dei dati, non possiamo dire niente $\boxed{\text{E}}$ N. P.

Quesito 3. Si consideri la funzione $f(x)=\sqrt{|x|}$ sull'intervallo $[-1,1]$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ è possibile applicare il teorema di Rolle $\boxed{\text{B}}$ è possibile applicare il teorema di Lagrange

$\boxed{\text{C}}$ non è possibile applicare nessuno dei due teoremi $\boxed{\text{D}}$ l'origine è un punto angoloso $\boxed{\text{E}}$ N. P.

Quesito 4. Si consideri la funzione $F(x)=\int_0^x e^{-t}\,dt$; quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$\boxed{\text{A}}$ $F'(x)=e^x$ $\boxed{\text{B}}$ $F(x)$ ha un asintoto obliquo destro $\boxed{\text{C}}$ $F(x)$ ha un asintoto verticale

$\boxed{\text{D}}$ $F(x)$ ha un asintoto orizzontale sinistro $\boxed{\text{E}}$ $F(x)$ ha un asintoto orizzontale destro $\boxed{\text{E}}$ N. P.

Problema 1. Si consideri la funzione $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{cx+d}$, con $a, b, c, d\in\mathbb{R}$.

• Determinare a, b, c, d in modo che il grafico della funzione passi per l'origine, risulti nel suo punto di ascissa $x=\frac{1}{2}$ tangente alla retta $3x+2y-1=0$ ed abbia un asintoto obliquo parallelo alla retta $13x-26y-\sqrt{37}=0$.

Dopo aver verificato che risulta $a=0$, $b=0$, $c=2$, $d=-2$, si risponda alle seguenti domande.

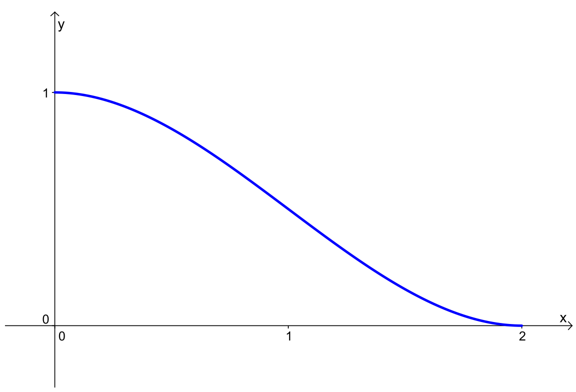
• Si studi la funzione ottenuta e si tracci il suo grafico $\mathcal{G}$.

• Si verifichi che la funzione è simmetrica rispetto al punto C di intersezione dei suoi asintoti.

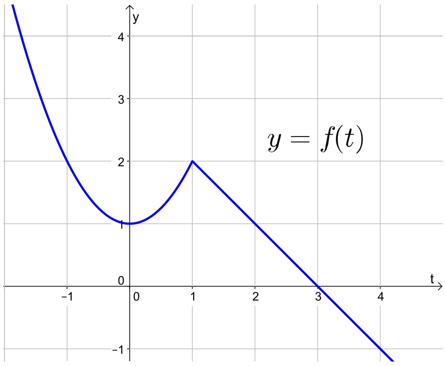
• Determinare l'equazione della circonferenza avente centro sul semiasse positivo dell'asse y e tangente ad entrambi i rami del grafico $\mathcal{G}$.

• Si dimostri che, al variare di P sulla curva, i triangoli formati dalla retta tangente in P e dagli asintoti hanno tutti la stessa area.

Esercizio 1. Furio ha trovato la figura a fianco su un vecchio libro; purtroppo non riesce a leggere l'equazione della curva (alle termiti piacciono i libri di matematica...), sa solo che si tratta di un arco di cubica avente equazione cartesiana $y=ax^3+bx^2+cx+d$ e che le rette tangenti negli estremi sono orizzontali.
Quali sono i valori dei coefficienti a, b, c, d?
Si dica se è possibile individuare il punto di flesso, senza sfruttare i valori dei coefficienti trovati in precedenza.



Esercizio 2. Si consideri la figura qui sotto dove il ramo sinistro è un arco di parabola; assegnata $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$, si determinino i valori di $F(1)$, $F'(1)$, $F(4)$ e $F'(4)$.



Esercizio 3. Si consideri la regione finita di piano $\mathscr{R}$ delimitata dalla curva $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$. Si calcoli il volume del solido $\mathscr{S}$ che ha come base la regione $\mathscr{R}$ e le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi.

Esercizio 4. Si considerino le curve $\gamma_1 : y = 4^x$ e $\gamma_2 : y = kx^2$ dove $k > 0$. Si determini il valore di k per cui le due curve si intersecano in due punti appartenenti al primo quadrante.

Esercizio 5. Si determini l'equazione dell'asintoto obliquo destro $y = mx + q$ della curva $y = \dfrac{x\,e^x}{e^x - 1}$ e si determini, utilizzando uno dei metodi di approssimazione studiati, l'ascissa $x > 0$ per cui si ha $\left|f(x) - (mx + q)\right| = \dfrac{1}{10}$.

Esercizio 6. Determina n intero in modo che, suddividendo l'intervallo di integrazione in n parti ed applicando il metodo dei trapezi, si ottenga un'approssimazione dell'integrale $\int_1^4 \arctan x\,dx$ con un errore assoluto minore di 10^{-5}.

Equazioni differenziali

Esercizio 7. (B. Demidovic) Tenendo conto che la velocità di raffreddamento di un corpo è proporzionale alla differenza delle temperature del corpo e dell'ambiente che lo circonda, si determini il tempo che occorre affinché la temperatura da 80° scenda a 30° se la temperatura dell'ambiente è di 18° e se nei primi 10 minuti la temperatura è scesa fino a 56°.

Esercizio 8. (B. Demidovic) Determinare la curva passante per $P(3;1)$ ed avente la seguente proprietà: il segmento della tangente alla curva, compreso tra il punto di tangenza e il punto di intersezione con l'asse x, è diviso a metà dal punto di intersezione con l'asse y.

Numeri complessi

Esercizio 9. Pierino, dopo vari anni di tentativi poco fruttuosi, si sta finalmente appassionando alla matematica; purtroppo oggi ha perso il foglio sul quale aveva scritto gli appunti della lezione.
Appena arrivato a casa, prova a ricostruire un esercizio svolto dal professore; si ricorda che si trattava di determinare le soluzioni di un'equazione della forma $2z^3 + \ldots z^2 + \ldots z + \ldots = 0$, dove al posto dei puntini ci sono dei numeri reali. Pierino ricorda anche che, tra le soluzioni dell'equazione, ci sono -2 e $-1 + 4i$.
Si dica qual è l'equazione che il professore ha scritto alla lavagna.

Esercizio 10. Si dimostri che la trasformazione

$$z \longmapsto \left(\sqrt{3} - i\right) \cdot z$$

equivale alla composizione della rotazione di $\dfrac{\pi}{6}$ in senso orario attorno all'origine e dell'omotetia di centro l'origine e rapporto uguale a 2. Si dimostri che l'ordine con cui si effettua la composizione non ha importanza. Successivamente si fornisca l'interpretazione geometrica della trasformazione

$$z \longmapsto iz - 2i.$$

Geometria analitica nello spazio

Problema 2. Si consideri la sfera $\mathscr{S}: x^2+y^2+z^2-12=0$ ed il piano $\pi: x-y=0$.
Si determinino le equazioni delle rette r ed s contenute nel piano π, passanti per il punto $P(3,3,0)$ e tangenti alla sfera $\mathscr{S}$.

Esercizio 11. Sono assegnate le due rette parallele $r: \begin{cases} x=2 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$ ed $s: \begin{cases} x=8 \\ y=k \\ z=0 \end{cases}$.

Si determini il luogo geometrico dei centri delle sfere aventi raggio uguale a 5 e tangenti alle due rette r ed s.
Tra le sfere considerate si determinino quelle tangenti ulteriormente al piano $\pi: x+2y+2z=0$.

Esercizio 12. Si determinino le equazioni delle sfere tangenti alla retta $r: \begin{cases} x=y \\ y=z-2 \end{cases}$ nel punto $T(1,1,3)$, passanti per $A(0,2,3)$ ed aventi raggio di lunghezza $\sqrt{14}$.

Si descriva poi l'intersezione delle due sfere ottenute.

Calcolo delle probabilità e statistica

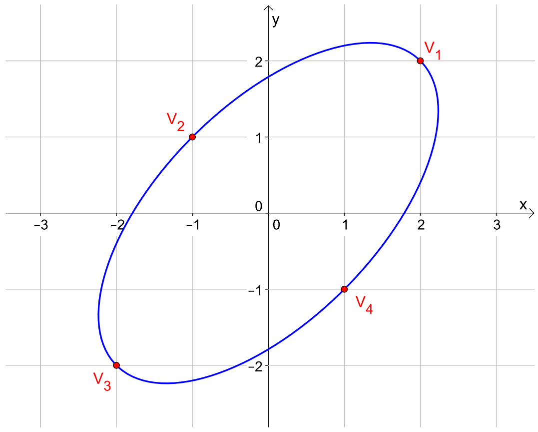
Esercizio 13. Qual è la probabilità, lanciando due dadi a 6 facce non truccati, di ottenere "8"?
- Lanciando 56 volte i due dadi, qual è la probabilità di ottenere almeno 3 volte "8"?
- Qual è la probabilità di ottenere per la quinta volta "8" al quarantesimo lancio?
- Quante volte dobbiamo lanciare i due dadi affinché la probabilità di ottenere "8" almeno una volta sia superiore al 96%?

Esercizio 14. Il prof. Matematico prende due carte da un mazzo di 40 carte e ci dice che, tra di esse, c'è almeno un asso. Qual è la probabilità che le due carte siano due assi?

Esercizio 15. Pierino sfida Lucignolo al gioco "Sperodivincere". Pierino lancia un dado non truccato e, se esce "6", vince, altrimenti il gioco passa a Lucignolo che lancia una moneta non truccata: se ottiene "croce" vince, altrimenti il gioco ritorna a Pierino che rilancia il dado e, se esce "6", vince. In caso contrario il gioco ritorna a Lucignolo che lancia la moneta e vince se esce "croce", e così via... il gioco finisce con un vincitore. Si calcoli la probabilità di vittoria di Pierino.
Poiché è più probabile che vinca Lucignolo, per avere un gioco *equo* i due giocatori stanno cercando un accordo: hanno deciso che Pierino, in caso di vittoria, guadagnerà 15 euro; non riescono però a capire quanto deve essere il guadagno di Lucignolo nel caso in cui è quest'ultimo a vincere. Sai aiutarli?

Varie

Esercizio 16. Facendo riferimento alla figura qui sotto, si determini l'equazione cartesiana dell'ellisse.
Si determinino inoltre le coordinate dei fuochi dell'ellisse.



Esercizio 17. Supponiamo di avere un capitale pari a 5000 euro e di investirlo con un tasso di interesse composto annuale del 12%; *quanto tempo (in anni) dovremo aspettare per ricavare una somma doppia, ossia uguale a* 10000 *euro?*
Esiste una regola pratica che approssima in modo accettabile questo risultato, la cosiddetta ***regola del 72***, apparsa per la prima volta nell'opera *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità* di Luca Pacioli, che fornisce il risultato cercato semplicemente dividendo 72 per il tasso di interesse i; nel nostro caso particolare si ottiene

$$t \approx \frac{72}{12} = 6 \text{ anni}.$$

Il candidato faccia un confronto tra la propria soluzione e quella del Pacioli.

Esercizio 18. Si consideri la parabola $\gamma: y=ax^2+bx+c$ (con $a<0$) che interseca l'asse x nei punti $A(-2,0)$ e $B(2,0)$. Si consideri inoltre la regione finita di piano $\mathscr{R}$ delimitata da γ e l'asse delle x. Sapendo che l'ordinata del baricentro di $\mathscr{R}$ è pari a 8, si determinino i coefficienti a, b, c. *Suggerimento: si sfrutti il secondo teorema di Pappo-Guldino.*

Concorso "Inventa la tua prova di matematica"

Marco Massa

MaddMaths!
MAtematica Divulgazione Didattica

PROBLEMA 1 Si consideri la funzione $f_{(a)}(x) = x \log_x(a)$, dove a è un parametro reale positivo diverso da 1.

(i) Si trovi il dominio di $f_{(a)}$ al variare di a ;

(ii) Si tracci un grafico qualitativo di $f_{(e)}$, ossia si ponga $a = e$ numero di Nepero, e si scrivano gli eventuali punti di massimo e di minimo ;

(iii) Provare che i punti di massimo e di minimo di $f_{(a)}$ non cambiano al variare di a in $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$;

QUESTIONARIO

1. Assegnata l'equazione

$$e^{2x}(ae^{2x} + b) + c = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
Dire se è possibile, e in tal caso indicare almeno una terna di possibili valori (a, b, c) affinché l'equazione ammetta:

(i) nessuna soluzione reale;

(ii) un'unica soluzione reale;

(iii) due soluzioni reali e distinte;

(iv) tre soluzioni reali e distinte;

(v) quattro soluzioni reali e distinte.

2. Mediante l'uso di appropriati grafici di funzione sovrapposti nello stesso piano cartesiano xOy, cercare di rappresentare nello stesso piano cartesiano, la caratteristica doppia elica del DNA bidimensionale.

3. Quali delle seguenti funzioni interseca più volte la seguente circonferenza: $x^2 + y^2 = \pi^2$

(a) $f(x) = 3x - 1$

(b) $f(x) = |x|$

(c) $f(x) = 4 \cos x$

(d) $f(x) = 4 \operatorname{sen} x$

4. Un professore approssima sempre i voti dei suoi studenti per difetto (ad esempio $6,1 \approx 6$; $4,5 \approx 4$; $7,9 \approx 7$).
Si indichi con f tale funzione di approssimazione (ossia che invia ogni numero reale x, nel più grande intero minore od uguale a x).

(a) Si calcoli la media integrale di f sull'intervallo $[1, 10]$.

(b) Per tale funzione vale il Teorema della media integrale ?

Si giustifichi la risposta.

5. Barbara pone la seguente domanda ad Alberto: "Quanto vale la radice quadrata di quattro?". Alberto risponde "Ovviamente due, è il numero il cui quadrato dà quattro.". Allora Barbara gli replica "Perché allora quando si risolve l'equazione $x^2 = 4$ le soluzioni sono più e meno due ?".
Cosa risponderesti se fossi al posto di Alberto ?

6. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale non constante.
Supponiamo che f è periodica di periodo T.
Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se è vera oppure falsa.
Si giustifichino le risposte.

(a) T è un multiplo intero di π ;

(b) f è una funzione pari oppure dispari ;

(c) $\lim_{x\to\infty} f(x)$, non esiste ;

(d) la funzione $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(\xi)d\xi$, è costante.

7. Sia f una generica funzioni reale di variabile reale, si consideri la seguente catena di implicazioni:

$$f \text{ è pari} \Rightarrow f \text{ non è iniettiva} \Rightarrow f \text{ non è biettiva} \Rightarrow f \text{ non è invertibile}$$

Ragionare sul fatto che la funzione $f(x) = cos(x)$ è pari, eppure è ben nota la funzione $cos^{-1}(x) = arccos(x)$.

8. Sia i l'unità immaginaria.
Si provi che i^i è un numero reale; se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

9. Erik non ha studiato i coefficienti binomiali, così, durante un compito in classe, ha usato $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}$.
Se il compito richiedeva di calcolare i coefficienti binomiali per $n \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, \}$ e $k \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$, qual'è la percentuale di errori commessi da Erik ?

Concorso "Inventa la tua prova di matematica"

Mirko Ruffilli

MaddMaths!

MAtematica Divulgazione Didattica

PROBLEMA 1

In questo problema si studieranno alcune proprietà dei polinomi di Chebychev (uno strumento molto utile in ingegneria e in molti casi di approssimazione numerica), nati dal lavoro dell'omonimo matematico russo che li studiò per primo.

Definiamo i polinomi di Chebychev attraverso la relazione di ricorrenza

$$T_0(x) := 1 \qquad T_1(x) := x \qquad T_{n+1}(x) := 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

1. Disegnare il grafico di T_0, T_1, T_2 e T_3 nel sistema di riferimento ortogonale e monometrico Oxy.
2. Dimostrare che $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
3. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
4. Trovare gli zeri del polinomio T_n.

PROBLEMA 2

Sia nelle telecomunicazioni che nello studio di algoritmi di compressione dei dati è di enorme importanza la definizione di entropia di una variabile aleatoria[1]. Per questo motivo l'oggetto di studio del problema sarà la funzione

$$g(x) = \begin{cases} -x\ln x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

1. g è derivabile in 0? È continua in 0? Studiare il grafico di g nel sistema di riferimento ortogonale e monometrico Oxy.
2. Sia r la retta di equazione $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$. Dimostrare che essa interseca il grafico di g in O ed in un altro punto, che chiameremo A.
3. Sia B un punto di ascissa compresa tra O ed A che giace sul grafico di g. Determinare dove bisognerebbe posizionare B affinché il triangolo OAB abbia area massima.

---

[1]Sia X una variabile aleatoria discreta e siano $x_1, \dots x_n$ i valori che essa può assumere. Si definisce entropia di X

$$H(X) = -\sum_{i=0}^{n} P(X = x_i)\log P(X = x_i)$$

QUESTIONARIO

1. Gigi, nel suo libro di informatica, ha trovato il seguente esercizio:

   > Sia $a > 0$. Verificare che, per n sufficientemente grande, il termine n-esimo della successione
   >
   > $$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$
   >
   > tende alla radice quadrata del numero a.

   Per quale motivo si verifica tale fenomeno?

2. È più probabile che lanciando una moneta bilanciata esca testa per 25 volte consecutive o che un giocatore faccia 6 al SuperEnalotto?

3. È noto che organi diversi di uno stesso individuo (ad esempio fegato e cervello di un feto) crescono con velocità diverse. Numerose indagini sperimentali hanno però mostrato che sussiste una relazione notevole: indicati, per esempio, con $x(t)$ e $y(t)$ i volumi dei due organi ad un generico istante t, le due quantità

   $$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

   risultano proporzionali secondo una costante di proporzionalità k (che <u>non</u> dipende dal tempo).
   Orbene, si dimostra che, in queste condizioni, si può giungere ad una equazione della forma

   $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k\frac{y}{x}$$

   Da quest'ultima equazione si deduca la relazione che lega $x(t)$ e $y(t)$, nota in medicina come legge allometrica.

4. Si deve al matematico francese Charles Hermite (1822-1901) l'utilizzo delle seguenti funzioni[2]

   $$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} D^n\left(e^{-x^2}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

[2] Abbiamo indicato con $D^n f$ la derivata n-esima della funzione f (per convenzione $D^0 f = f$)

Esse hanno rilevanza in numerose applicazioni di teoria della probabilità e di meccanica quantistica.

Si scrivano $H_0(x)$, $H_1(x)$ e $H_2(x)$, dopodiché si dimostri che le funzioni $H_n(x)$ sono polinomi per ogni $n \in \mathbb{N}$.

5. Siete di notte in una strada scarsamente illuminata. Un individuo truce vi coglie alle spalle e vi chiede di calcolare

$$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)^{\sin^2 x}$$

Cosa gli rispondete?

6. Uno dei matematici più impotanti del Medioevo è Leonardo Pisano, detto Fibonacci. Non è solo noto per la successione omonima (il più famoso esempio di oggetto matematico ancora materia di studio a distanza di secoli), ma anche per avere rivoluzionato il sapere scientifico dell'epoca con il suo trattato *Liber Abaci*.

   Quali novità per il suo tempo introdusse in tale opera?

7. A Christoph Gudermann (1798-1852) è stata intitolata una funzione che mostra il legame tra le funzioni trigonometriche e le funzioni iperboliche[3].

   Nata da studi di cartografia, la gudermanniana è definita nel seguente modo

$$\operatorname{gd} x := \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cosh t}\,.$$

   Dopo aver dimostrato l'identità

$$\operatorname{gd} x = 2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$$

[3] Essa gode di notevoli proprietà, ad esempio si ha

$$\sin \operatorname{gd} x = \tanh x; \qquad \cos \operatorname{gd} x = \operatorname{sech} x;$$
$$\tan \operatorname{gd} x = \sinh x; \qquad \sec \operatorname{gd} x = \cosh x;$$
$$\tanh \frac{\operatorname{gd} x}{2} = \tan \frac{x}{2}.$$

si deduca che la funzione inversa di gd è

$$(\mathrm{gd}\,)^{-1}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$$

8. Nel trattato *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* Isaac Newton (1642-1727) enunciò le tre leggi della dinamica classica.

   Ecco una traduzione piuttosto libera ma efficace della prima legge:

   > *Un corpo non soggetto a forze esterne, o tale che la risultante delle forze esterne agenti su di esso sia nulla, permane nello stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

   Ed eccone una della seconda:

   > *L'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale e nella stessa direzione della forza netta agente su di esso, è invece inversamente proporzionale alla sua massa. In formule:* $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.

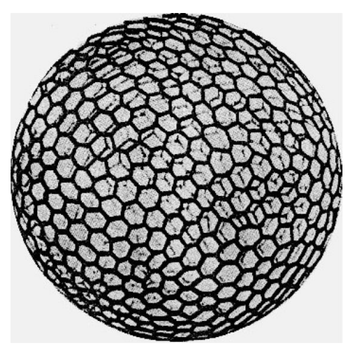
   Quale risultato matematico fa da ponte tra la prima e la seconda legge di Newton?

9. Il valore di un titolo azionario è diminuito del 9% nell'ultimo mese. Di quanti punti percentuali dovrebbe aumentare il prossimo mese per riprendere il valore dell'inizio del mese scorso?

10. Alcuni radiolari (microrganismi acquatici unicellulari) hanno un esoscheletro poliedrico convesso.

    Da figure realizzate al microscopio, come quella a lato, si può osservare che molte facce sono di forma esagonale.

    È possibile che lo siano tutte?



Concorso "Inventa la tua prova di matematica"

Lorenzo Meneghini (altro elaborato)

MaddMaths!
MAtematica Divulgazione Didattica

Concorso “Inventa la tua prova di matematica per la maturità”

PRIMO GRUPPO

QUESITO 1

Si consideri il fascio di parabole $y = kx^2 - \frac{6k-1}{3}x - \frac{24k-8}{3}$, in un piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane.

a. Si trovi l’equazione della normale alla generica parabola del fascio nel suo punto di ascissa $x = -2$ e si determini il valore del parametro k in modo che la retta trovata passi per A(4, 4).
b. Si trovi il luogo geometrico dei vertici delle parabole del fascio e se ne disegni il grafico; si verifichi inoltre che si tratta di una funzione simmetrica rispetto al punto $C(1,3)$.
c. Si verifichi che le parabole del fascio hanno due punti comuni, uno dei quali è A; si calcoli l’area della regione finita di piano delimitata dalle parabole corrispondenti a $k = 2$ e $k = -1$.

QUESITO 2

Data la semicirconferenza di centro O e diametro AB = 2r, sia CD una corda di lunghezza uguale al raggio (con C più vicino a B). Si esprima in funzione dell’angolo $\widehat{BOC} = x$ la misura $A(x)$ dell’area del quadrilatero ABCD. Si rappresenti il grafico della funzione $y = A(x)$ tenendo conto delle condizioni geometriche del problema e si verifichi che l’area è massima quando CD è parallela al diametro.

QUESITO 3

Nel piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la curva γ di equazione $y = x(x-3)^2$. Indicata con S la parte di piano delimitata dalla curva γ, dagli assi cartesiani e dalla retta $x = 3$, si calcolino i volumi dei solidi W_x e W_y, ottenuti da una rotazione completa di S attorno a ciascuno degli assi cartesiani.

SECONDO GRUPPO

QUESITO 4

a. Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $\mathbb{R}$, con derivata prima continua. Dimostrare che se $f(x)$ è dispari la sua derivata prima è pari.
b. Si dimostri il Teorema di Lagrange, dopo averlo enunciato. Si dica se il teorema rimane valido nel caso in cui la funzione sia continua ma non derivabile in un punto c interno all’intervallo $]a,b[$.

QUESITO 5

a. Da una rilevazione statistica si è notato che, in un comune di 15000 abitanti, 30 sono celiaci. Scelte a caso 200 persone, calcolare la probabilità degli eventi
   A: i celiaci sono più di 2 B: i celiaci sono esattamente 3
b. Un chiosco vende hot dog a 1,30 € l’uno. Le vendite giornaliere sono distribuite come una v.c. X di media 580 e scarto quadratico medio 72, mentre i costi di gestione sono modellati dalla v.c. C = 120 + 0,9 X. Si trovi la media e lo scarto quadratico medio dei guadagni giornalieri.

QUESITO 6

a. Dopo aver scritto l'equazione della sfera σ passante per i punti $A\left(-2,2,-3\right)$, $B\left(4,-2,-7\right)$ $C\left(1,-7,-3\right)$ e $D\left(-3,-2,0\right)$, si calcoli il rapporto tra il volume del tetraedro ABCD e quello della sfera σ.

b. Nello spazio, riferito ad un sistema di coordinate cartesiane Oxyz, si consideri la circonferenza di equazioni $\Gamma : \begin{cases} \left(x+5\right)^2 + \left(y-6\right)^2 + \left(z-5\right)^2 = 100 \\ 2x - 2y - z = -9 \end{cases}$; dopo aver trovato il centro ed il raggio del cerchio, si calcoli il volume del cono avente vertice V(–1, 10, 3) e base Γ.

Meneghini Lorenzo
Liceo "F. Corradini" – Thiene (VI)

Concorso “Inventa la tua prova di matematica”

Amedeo Sgueglia

MaddMaths!

MAtematica Divulgazione Didattica

Concorso "Inventa la tua prova di matematica per la maturitá"

Elaborato di Amedeo Sgueglia,
studente del corso di laurea in matematica
dell'universitá di Padova

Il candidato risolva, a sua scelta, un problema e cinque quesiti tra quelli proposti.

Problema 1 Si consideri il polinomio

$$Q(x) = x^p + px^{p-1} + px^{p-2} - 1$$

con p $\geq$ 4 numero naturale.

(a) Si mostri che se p é pari, il polinomio ammette un'unica radice razionale; esistono radici razionali se p é dispari?

(b) Si calcoli la derivata prima di Q(x) e si determinino le sue tre radici $x_1 < x_2 < x_3$, notando che sono sempre distinte.

(c) Si studi il segno di Q'(x), distinguendo il caso p pari e il caso p dispari.

(d) Si stabilisca il segno di $Q(x_2)$ e di $Q(x_3)$. Sfruttando il punto (c), si riesce a stabilire il segno di $Q(x_1)$ nel caso p pari?

(e) Supponendo che $Q(x_1) < 0$ (in entrambi i casi), si abbozzi il grafico di Q(x), distinguendo il caso p pari e p dispari.

Nota: non é richiesto lo studio della convessitá.

Problema 2 Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_{(a,b,c)}(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{(x+1)^c}$$

con a, b, c reali.

(a) Stabilire per quali k reali, esistono scelte di a,b,c tali che la retta y=k sia asintoto orizzontale di $f_{(a,b,c)}(x)$.

(b) Si trovino a,b,c in modo che $f_{(a,b,c)}(x)$ abbia asintoto orizzontale y=2, un punto di minimo di ascissa $\frac{2}{3}$ e passi per il punto A di coordinate (0,1). Dopo aver verificato che a=-2,b=1,c=2 si studi e si rappresenti la funzione

$$g(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$$

Nota: non é richiesto lo studio della convessitá.

(c) Sia r una retta non verticale passante per A di coefficiente angolare m, allora r interseca la curva g in ulteriori due punti A_1 e A_2. Si determinino, in funzione di m, ascissa e ordinata del punto medio P del segmento A_1A_2; determinare inoltre il luogo geometrico descritto da P al variare di m.

(d) Studiare graficamente il numero di soluzioni dell'equazione g(x)=m con m reale.

(e) Calcolare $\int_0^1 g(x)\,dx$.

Quesito 1 Si consideri la seguente operazione sull'insieme dei numeri interi

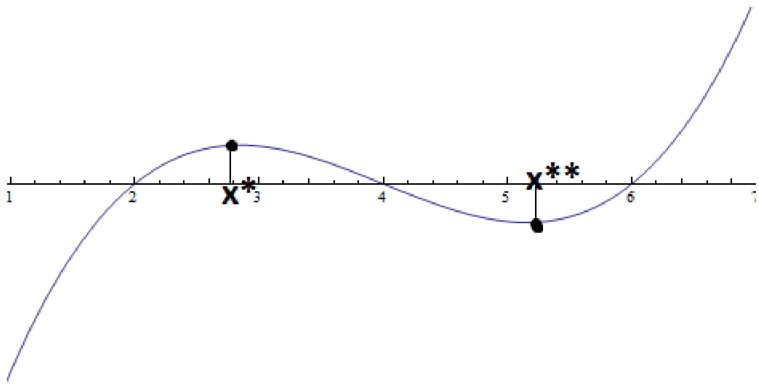
$$x \diamond y = \begin{cases} x+y, & \text{se x e y sono entrambi pari;} \\ x+y+3, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare un intero z tale che x $\diamond$ z = x = z $\diamond$ x per ogni x intero. Confutare la seguente affermazione: per ogni x intero, esiste y intero tale che x $\diamond$ y = z.

Quesito 2 Sia f una funzione derivabile n+1 volte nell'intervallo [a,b]. Supponendo che f si annulli in n+1 punti distinti dell'intervallo [a,b], mostrare che esiste $\xi \in$ [a,b] tale che $f^{(n+1)}(\xi) = 0$ ($f^{(n+1)}$ indica la derivata n+1-esima di f).

Suggerimento: *applicare il teorema di Rolle alle funzioni* f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, ...

Quesito 3 Sia f una funzione due volte derivabile definita sull'intervallo [1,7]. Supposto che il seguente grafico sia quello della derivata prima di f, determinare monotonia e convessitá di f. Giustificare al meglio.



Nota: *il grafico attraversa l'asse x nei punti di ascissa 2,4,6; il grafico cambia monotonia nei punti di ascissa* x^* *e* x^{**}.

Quesito 4 Determinare $a > 0$ numero reale, in modo che il valor medio della funzione $h(x) = e^x sin(x)$ nell'intervallo I=$[0, \pi]$ sia $\frac{e^\pi + a}{2\pi}$.

Quesito 5 Tra tutti i coni per i quali é costante la somma s del raggio di base e dell'apotema, qual é quello di volume massimo?

Quesito 6 Risolvere la seguente equazione:

$$3^{3x} - 3^{2x+1} + 2 = 0$$

Quesito 7 Disegnare l'insieme i cui punti hanno coordinate (x;y) che soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 10x - 24 \\ y - x^2 < 7 - 8x \\ -7 + y < x \end{cases}$$

Quesito 8 Dette x_1 e x_2 le radici dell'equazione

$$(m^4 + 7)x^2 - 2(5m^2 + 3)x + 2m^2 + 1 = 0$$

stabilirne il segno e calcolare il seguente limite:

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1|\,|x_2|}.$$

Suggerimento: *Non é necessario calcolare esplicitamente* x_1 *e* x_2.

Quesito 9 Sia data la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{se x<0;} \\ e^x + sin(x), & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per quali coppie di numeri reali (a,b) la funzione é continua in 0? Per quali coppie é derivabile?

Quesito 10 Determinare (esplicitamente) tutte le funzioni f:$\{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,\ldots,8\}$ che verificano la seguente proprietá:

f(i+j)=f(i)+f(j) per ogni i,j $\in \{0,1,2,3\}$ con i+j $\leq$ 3.

Suggerimento: *Quale relazione lega f(i) e f(1)?*

Concorso "Inventa la tua prova di matematica"

Carmelo Antonio Finocchiaro

MaddMaths!
MAtematica Divulgazione Didattica

Carmelo Antonio Finocchiaro

Liceo Scientifico - corso di ordinamento

Il candidato risolva uno dei due seguenti problemi e 5 dei 10 quesiti proposti nel questionario.

Problema 1. Siano a un numero reale positivo e $C(\mathbf{R})$ l'insieme delle funzioni continue a valori reali $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Il candidato affronti le seguenti questioni.

(1) Si spieghi perché, per ogni numero naturale n e per ogni $f \in C(\mathbf{R})$, l'integrale $T_n(f) := \int_{-a}^{a} x^n f(x)\mathrm{d}x$ esiste finito.

(2) Si consideri adesso la funzione $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definita ponendo

$$g(x) := \frac{1}{4+x^2} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}$$

(a) Dopo aver spiegato perché $g \in C(\mathbf{R})$, si calcoli $T_0(g), T_1(g), T_2(g)$.

(b) Si dimostri che, se n è dispari, allora $T_n(g) = 0$.

(c) Si dimostri che, se n è pari, allora

$$T_n(g) \leq \frac{a^{n+1}}{2(n+1)}.$$

(d) Al variare di $a \in]0, +\infty[$, si calcoli $\lim_{n\to+\infty} T_n(g)$.

(3) Sia adesso $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ una qualunque funzione continua, e sia $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita ponendo $F(x) := \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$.

(a) Dopo aver spiegato perché $F \in C(\mathbf{R})$, si mostri che $T_0(f) = F(a) - F(-a)$.

(b) Si calcoli $T_n(F)$, in funzione di a, $F(a), F(-a)$ e $T_{n+1}(f)$.

(c) Considerata la funzione $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto \operatorname{arctg} x$, si calcoli, al variare di a, $\lim_{n\to+\infty} T_{2n+1}(h)$.

Problema 2. Si consideri un triangolo ABC, rettangolo in A, la cui ipotenusa misura $2a$. Il candidato affronti le seguenti questioni.

(1) Si determini il valore α_0, in radianti, dell'angolo $A\widehat{B}C$ in modo che risulti massima la somma delle misure del lato $\overline{AB}$ e dell'altezza relativa all'ipotenusa. Nel seguito sarà $A\widehat{B}C = \alpha_0$.

(2) Al variare del parametro reale positivo λ, si discuta esistenza e unicità di un punto P sull'ipotenusa $\overline{BC}$ tale che $\overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = \lambda\overline{AP}^2$.

(3) Sia adesso Q un punto sull'ipotenusa $\overline{BC}$, H, K le proiezioni ortogonali di Q su $\overline{AB}, \overline{AC}$, rispettivamente, e sia $\mathcal{C}_Q$ il cilindro ottenuto facendo ruotare di un angolo giro il rettangolo $QHAK$ intorno al lato AK.

(a) Si determini per quale/i posizione/i di $Q \in \overline{BC}$ il rettangolo $QHAK$ ha area massima.

(b) Si determini per quale/i posizione/i di $Q \in \overline{BC}$ il cilindro $\mathcal{C}_Q$ ha volume massimo.

(4) Si fissi adesso, sul piano contenente il triangolo ABC, un riferimento cartesiano ortogonale monometrico tale che:

i) l'origine di tale sistema di riferimento coincida con A;

ii) il punto B stia sul semiasse positivo delle ascisse;

iii) il punto C stia sul semiasse positivo delle ordinate.

Si determinino la misura del raggio e le coordinate del centro della circonferenza tangente agli assi coordinati e all'ipotenusa del triangolo ABC.

Questionario.

(1) Si calcoli la somma delle cifre del numero intero $(10^{123}+1)^4$.

(2) Sul piano euclideo reale sia fissato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Si determini l'equazione della parabola avente vertice in $(0,0)$ e fuoco in $(1,1)$.

(3) Siano a, b numeri interi tali che $\mathrm{MCD}(a,b) = 8$. Si determinino tutti e soli i valori che può assumere $\mathrm{MCD}(a^3, b^2)$.

(4) Sia x un numero reale tale che $x^{13}, x^{19} \in \mathbf{Q}$. Si dimostri che $x \in \mathbf{Q}$.

(5) Sia n un intero positivo. Si descriva, al variare di n, l'espressione in base 10 del numero

$$(10+1)\cdot(10^2+1)\cdots(10^{2^{n-1}}+1)\cdot(10^{2^n}+1)$$

(6) La cifra delle decine e delle unità di un numero primo di due cifre sono nell'ordine x, y. Si dica quanti e quali sono i fattori primi del numero la cui espansione decimale è $xyxy$.

(7) Se esiste, si determini un parallelogramma avente perimetro 4 m e area $\sqrt{5}$ m^2.

(8) Se esiste, si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x + \cos^2 x + \operatorname{arctg}^3 x}{x + \sqrt{x} + \log x + 2^x \operatorname{sen}(2^{-x})}$$

(9) Si dica se può esistere una funzione continua $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ avente la seguente proprietà: *per ogni $k \in \mathbf{R}$, la retta di equazione $y = k$ interseca la curva di equazione $y = f(x)$ esattamente in due punti.*

(10) In un mondo fantastico e molto lontano esistono autobus con infiniti posti e alberghi con infinite stanze. Uno di tali alberghi è il Grand Hotel Hilbert, dove ciascuna delle infinite stanze è identificata con uno e un solo numero naturale. Supponiamo che l'hotel si sia completamente riempito e che arrivino due ospiti, ciascuno dei quali chiede una stanza singola. Il direttore, senza alcuna esitazione, afferma di poter trovare altre due stanze libere. Subito dopo arriva un autobus con una infinità numerabile di turisti, ciascuno dei quali richiede una stanza singola. Anche in questo caso il direttore dell'hotel dice di poter risolvere facilmente il problema. Il candidato illustri come il direttore agisce in ciascuno dei casi descritti.

[Il quesito proposto è un paradosso creato dal matematico David Hilbert per mettere in luce le sorprendenti proprietà degli insiemi infiniti].

Concorso “Inventa la tua prova di matematica”

Sabrina Natoli

MaddMaths!
MAtematica Divulgazione Didattica

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo Scientifico

Tema di Matematica

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario

PROBLEMA 1

Si disegni il grafico qualitativo della funzione $f(x) = \frac{2x-1}{2x-4}$

1. Verificare che l'equazione $y = \frac{2x-1}{2x-4}$ rappresenta un'iperbole λ.
2. Scrivere l'equazione della parabola γ che ha asse di simmetria parallelo all'asse *y*, vertice in V (1,2) e passa per P (2,0).
3. Rappresentare la parabola γ in un sistema *xOy* di assi cartesiani ortogonali. Detto V il vertice della parabola, determina sull'arco $\overset{\frown}{OV}$ un punto A in modo che sia massima l'area del triangolo OAV.

PROBLEMA 2

Le leggi della riflessione e della rifrazione, note dalla fisica, si possono compendiare in questo unico PRINCIPIO DI FERMAT: *la luce nella sua propagazione segue sempre il cammino per cui impiega il minimo tempo*.

Risolvere i seguenti problemi considerando separatamente i due casi della riflessione e della rifrazione:

1. In un piano A e B sono due punti situati da una stessa parte della retta *s*; da A esce un raggio di luce, il quale, dopo avere colpito la retta *s*, muovendosi con la velocità costante *v* raggiunge il punto B. Si domanda qual è il punto C della retta *s* a cui corrisponde il minimo tempo perché la luce passi da A a B.
2. In un piano A e B sono due punti situati da parti opposte di una retta *s*, linea di separazione di due mezzi diversi nei quali la luce si propaga con la velocità v_1 e v_2. Qual è il punto C della retta *s* a cui corrisponde il percorso di minimo tempo?

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo Scientifico

Tema di Matematica

QUESTIONARIO

1. Determina il dominio della seguente funzione algebrica $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2|x|+3}}$
2. Verificare, applicando la definizione, che la seguente funzione, nel punto indicato a fianco, è continua $f(x) = 2x+5$ (x = 1)
3. Il Teorema di Archimede dice che *l'area di un segmento parabolico è uguale ai* $\dfrac{2}{3}$ *di quella del rettangolo che ha un lato coincidente con la corda che determina il segmento parabolico e il lato opposto tangente alla parabola.*
   Verificare il teorema nel caso particolare in cui la corda è perpendicolare all'asse della parabola.
4. Calcolare $\lim_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$
5. Dopo avere enunciato il *Teorema di Lagrange*, giustificare la sua non applicabilità alla funzione $f(x) = x+2+|x-1|$ nell'intervallo $[0,2]$
6. Verificare che fra tutti i rettangoli isoperimetrici quello di area massima è il quadrato.
7. Calcolare il valore medio della funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[0,2]$ e determinare l'ascissa c del punto nel quale la funzione assume tale valor medio.
8. Determinare, applicando la definizione, la somma della serie
   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$$
   detta *serie di Mengoli*.
9. Allo sportello di un ufficio postale si presentano in media 20 persone all'ora.
   Calcolare la probabilità che:
   a. In un'ora si presentino 15 persone
   b. In un'ora si presentino da 18 a 20 persone
   c. In mezz'ora si presentino 8 persone
   d. In un'ora si presentino almeno 4 persone
10. Calcolare la misura V del volume del solido ottenuto dalla rotazione di 180° attorno all'asse x della parte di piano individuata dalla parabola di equazione $y^2 = x$ e dalla retta $x = 1$