Sistemi di tre equazioni in due incognite o di due equazioni in tre incognite

Risolvi i seguenti sistemi.

ESERCIZI SVOLTI

43 $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x-4y=-7 \\ 7x+y=9 \end{cases}$

Il sistema lineare dato è formato da **tre equazioni** in **due incognite**. In casi come questo possiamo ad esempio incominciare a risolvere il sistema formato dalle prime due equazioni:

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x-4y=-7 \end{cases} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Verifichiamo ora se la coppia ordinata $(1;2)$ è soluzione anche della terza equazione

$$7x+y=9 \xrightarrow[x=1 \wedge y=2]{} 7\cdot 1+2=9 \longrightarrow 9=9 \quad \textbf{V}$$

Poiché la coppia $(1;2)$ soddisfa anche la terza equazione del sistema concludiamo affermando che le tre equazioni sono *compatibili* e che il sistema dato è verificato per

$$\begin{cases} \mathbf{x=1} \\ \mathbf{y=2} \end{cases}$$

44 $\begin{cases} 4x-3y=-17 \\ x+y=1 \\ 5x+4y=1 \end{cases}$

Procediamo come nel precedente esercizio. Risolviamo il sistema formato dalle prime due equazioni:

$$\begin{cases} 4x-3y=-17 \\ x+y=1 \end{cases} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$$

Verifichiamo se la terza equazione è soddisfatta per $x=-2 \wedge y=3$:

$$5x+4y=1 \xrightarrow[x=-2 \wedge y=3]{} 5(-2)+4\cdot 3=1 \longrightarrow 2=1 \quad \textbf{F}$$

La coppia ordinata $(-2;3)$ non soddisfa la terza equazione e quindi concludiamo affermando che le tre equazioni sono *incompatibili* e che il **sistema è impossibile**.

45 $\begin{cases} 3x-2y=7 \\ x+y-9=0 \\ 3x+8y=47 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 3x-y=5 \\ x-5y-11=0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases};\ \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}\right]$

46 $\begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ x-3y-7=0 \\ 2x+5y-4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=3x \\ 2x+y=5 \\ -x+3y-2=0 \end{cases}$ [impossibile; impossibile]

47 $\begin{cases} 4x-3y+6=0 \\ x+y=-5 \\ 3x-4y+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y=3 \\ \frac{1}{2}x+y=1{,}5 \\ 3x+6y=5 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases};\ \text{impossibile}\right]$

48 $\begin{cases} 4x-3y=2 \\ 2x-1{,}5y=1 \\ 1{,}\overline{3}x-y=0{,}\overline{6} \end{cases}$ $\left[\text{indeterminato: le soluzioni sono le coppie } \left(x;\frac{4x-2}{3}\right)\right.$ $\left.\text{oppure le coppie } \left(\frac{2+3y}{4};y\right)\right]$

49 $\begin{cases} \dfrac{x+y-1}{2x-y+1}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3x-1}{3y+3}=0{,}1\overline{6} \\ \dfrac{x+4}{y+6}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} (a-1)x+ay=2a-1 \\ ax+(a+1)y=2a \\ 2x+ay=1+(a-1)^2 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=1 \end{cases};\ \begin{cases} x=1-a \\ y=a \end{cases}\right]$

ESERCIZI SVOLTI

50 $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$

Il sistema lineare dato è formato da **due equazioni** in **tre incognite**. In casi come questo conviene, di solito, considerare una delle tre incognite come parametro e risolvere il sistema nelle altre due incognite. In questo modo, se il sistema non è impossibile, si esprimono due incognite in funzione dell'incognita scelta come parametro. In generale, quindi, i sistemi come quello dato sono indeterminati.
Consideriamo, ad esempio, z come parametro:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 - z \\ x - y = 1 - 2z \end{cases} \longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = z \end{cases} \quad \text{con } z \in \mathbb{R}$$

Il sistema dato è perciò *indeterminato* e le sue soluzioni sono

$$\begin{cases} x = 1 - z \\ y = z \\ z \text{ qualsiasi} \end{cases} \quad \text{con } z \in \mathbb{R}$$

cioè sono le terne ordinate $(\mathbf{1 - x ; z ; z})$ con $z \in \mathbb{R}$.
Ti lasciamo il compito di verificare che

- se si assume y come parametro le soluzioni sono le terne ordinate $(1 - y ; y ; y)$ con $y \in \mathbb{R}$
- se si assume x come parametro le soluzioni sono le terne ordinate $(x ; 1 - x ; 1 - x)$ con $x \in \mathbb{R}$.

51 $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$

Scriviamo il sistema nella forma

$$\begin{cases} x + y = 3 - z \\ x + y = 1 + 2z \end{cases}$$

e osserviamo che esso è *impossibile* se risulta

$$3 - z \neq 1 + 2z \longrightarrow z \neq \frac{2}{3}$$

Se invece è $z = \frac{2}{3}$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y = 3 - \frac{2}{3} \\ x + y = 1 + 2 \cdot \frac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{7}{3} \\ x + y = \frac{7}{3} \end{cases}$$

ed è perciò indeterminato. Esprimiamo le soluzioni di quest'ultimo sistema, ad esempio, in funzione di x, mediante le coppie ordinate $\left(x ; \frac{7}{3} - x\right)$, considerando quindi x come parametro.

Il sistema dato è perciò *indeterminato* e le sue soluzioni sono le terne

$$\left(x ; \frac{7}{3} - x ; \frac{2}{3}\right) \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

Puoi facilmente verificare che risultano soluzioni, in alternativa, anche le terne

$$\left(\frac{7}{3} - y ; y ; \frac{2}{3}\right) \quad \text{con } y \in \mathbb{R}$$

52 $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x + y - 3z = 6 \end{cases}$ [indeterminato: le soluzioni sono le terne $\left(x ; 12 - 2x ; \frac{6 - x}{3}\right)$ oppure le terne $\left(\frac{12 - y}{2} ; y ; \frac{y}{6}\right)$ oppure $(6 - 3z ; 6z ; z)$]

53 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$ [indeterminato: le soluzioni sono le terne $\left(x ; \frac{x - 1}{2} ; \frac{3 - 3x}{2}\right)$ oppure...]

54 $\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 4x + 2y - 6z = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y - 2z = -1 \\ x + 2y - 4z = -4 \end{cases}$ [impossibile; impossibile]

55 $\begin{cases} \dfrac{1}{4}x - y + z = 1 \\ x - 4y + 4z = 4 \end{cases}$

[indeterminato: assumendo y e z come parametri le soluzioni sono le terne $(4y - 4z + 4\,;\, y\,;\, z)$ con $y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$]

56 $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + \dfrac{3}{2}y + 2z = 3 \end{cases}$

$\left[\text{indeterminato: le soluzioni sono le terne } \left(x\,;\, -\dfrac{2}{9}(1+3x)\,;\, \dfrac{5}{3}\right)\right]$

57 $\begin{cases} \dfrac{2x - z}{3} - 2(x + y) = 1 \\ \dfrac{x + 2y}{2} - \dfrac{1}{3}(x - z) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

$\left[\text{indeterminato: le soluzioni sono le terne } \left(x\,;\, \dfrac{-10 - 7x}{6}\,;\, 7 + 3x\right) \text{ oppure...}\right]$

58 $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = a \\ \dfrac{x - a}{2} + \dfrac{y + 2a}{6} - \dfrac{1}{3}z = a + 1 \end{cases}$

$\left[\text{indeterminato: le soluzioni sono le terne } \left(\dfrac{8a + 6 + 2y}{5}\,;\, y\,;\, \dfrac{11y - 11a - 12}{10}\right) \text{ oppure...}\right]$