1 Oggi abbiamo comperato 2 litri di latte e 6 vasetti di yogurt, spendendo 5,40 euro; la settimana precedente avevamo acquistato, allo stesso prezzo, 3 litri di latte e 4 vasetti di yogurt, spendendo 5,10 euro. Quanto costa un litro di latte e quanto un vasetto di yogurt?

A Individuiamo le incognite.
Assumiamo come incognite il prezzo di un litro di latte e il prezzo di un vasetto di yogurt:

x = prezzo, in euro, di un litro di latte

y = prezzo, in euro, di un vasetto di yogurt

B Poniamo le condizioni di accettabilità.
Le incognite x e y rappresentano dei prezzi, che devono essere positivi:

$$\text{C.A.: } x > 0 \wedge y > 0$$

C Scriviamo le equazioni.
Se il prezzo di un litro di latte in euro è x, oggi per 2 litri di latte abbiamo speso $2x$ euro; per i 6 vasetti di yogurt, che costano y euro ciascuno, abbiamo speso $6y$ euro. In totale quindi oggi abbiamo speso $(2x + 6y)$ euro. D'altra parte sappiamo di aver speso 5,40 euro. Perciò deve essere

$$2x + 6y = 5{,}40 \qquad \boxed{8}$$

Analogamente la settimana precedente abbiamo speso $3x$ euro per il latte e $4y$ euro per lo yogurt. Sappiamo di aver speso 5,10 euro e quindi deve essere

$$3x + 4y = 5{,}10 \qquad \boxed{9}$$

La $\boxed{8}$ e la $\boxed{9}$ sono le equazioni che cercavamo.

D Risolviamo il sistema.
Naturalmente il sistema da risolvere è quello formato dalla $\boxed{8}$ e dalla $\boxed{9}$:

$$\begin{cases} 2x + 6y = 5{,}40 \\ 3x + 4y = 5{,}10 \end{cases}$$

Risolviamolo, ad esempio, con la regola di Cramer:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -10 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 5{,}40 & 6 \\ 5{,}10 & 4 \end{vmatrix} = -9 \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5{,}40 \\ 3 & 5{,}10 \end{vmatrix} = -6$$

Il sistema è determinato e si ha

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-9}{-10} \\ y = \dfrac{-6}{-10} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 0{,}90 \\ y = 0{,}60 \end{cases}$$

E Confrontiamo la soluzione del sistema con le condizioni di accettabilità.
Si ha $0{,}90 > 0$ e $0{,}60 > 0$, quindi la soluzione trovata è accettabile.

F Formuliamo la soluzione del problema.
Un litro di latte costa 0,90 €, un vasetto di yogurt 0,60 €.

2 Miscelando 4 litri di una soluzione A con 8 litri della soluzione B si ottiene una miscela che contiene il 40% di alcol. Se invece si miscelano 6 litri di A con 3 litri di B si ottiene una miscela che contiene il 30% di alcol. Quali percentuali di alcol sono contenute da A e da B?

Assumiamo come incognite le percentuali di alcol contenute nelle due soluzioni:

$$x = \text{percentuale di alcol contenuta in } A \ (x \geq 0)$$
$$y = \text{percentuale di alcol contenuta in } B \ (y \geq 0)$$

La quantità di alcol contenuta nella prima miscela è la somma della quantità di alcol contenuta in 4 litri di A, che è $4x$, e della quantità di alcol contenuta in 8 litri di B, che è $8y$; d'altra parte sappiamo che i $4 + 8 = 12$ litri di miscela così ottenuta contengono il 40% di alcol, ossia $12 \cdot 40\% = 12 \cdot \frac{40}{100} = 4{,}8$; la miscela contiene quindi 4,8 litri di alcol. Dev'essere perciò

$$4x + 8y = 4{,}8 \qquad \boxed{10}$$

Ragionando analogamente per la seconda miscela, si ottiene l'equazione

$$6x + 3y = 2{,}7 \qquad \boxed{11}$$

Scriviamo il sistema formato dalla $\boxed{10}$ e dalla $\boxed{11}$ e risolviamolo:

$$\begin{cases} 4x + 8y = 4{,}8 \\ 6x + 3y = 2{,}7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 0{,}2 \\ y = 0{,}5 \end{cases}$$

Possiamo quindi concludere che la percentuale di alcol contenuta nella soluzione A è $0{,}2 = \frac{0{,}2 \cdot 100}{100} = \frac{20}{100}$, ossia il 20%, mentre la percentuale di alcol contenuta in B è $0{,}5 = \frac{0{,}5 \cdot 100}{100} = \frac{50}{100}$, ossia il 50%.

3 Il caffè Arabica contiene l'1,2% di caffeina e costa 10 € al kilogrammo. Il caffè Robusta di prima qualità contiene il 2,2% di caffeina e costa 6 € al kilogrammo. Il caffè Robusta di seconda qualità contiene il 2,6% di caffeina e costa 4 € al kilogrammo. Quali quantità delle tre qualità sono necessarie per produrre 20 kg di una miscela contenente l'1,8% di caffeina al costo di 7,50 € al kilogrammo?

A Individuiamo le incognite.

Assumiamo come incognite le quantità, in kilogrammi, delle tre qualità di caffè da impiegare per la miscela:

x = n° kilogrammi di caffè Arabica;

y = n° kilogrammi di caffè Robusta di prima qualità;

z = n° kilogrammi di caffè Robusta di seconda qualità.

B Poniamo le condizioni di accettabilità.

Ciascuna delle tre variabili dovrà assumere un valore maggiore o uguale a zero, perché quantità negative non avrebbero senso, e minore o uguale a 20, perché nessuna delle tre qualità può, da sola, superare i 20 kg di miscela che si vogliono produrre:

C.A.: $0 \le x \le 20$; $0 \le y \le 20$; $0 \le z \le 20$

C Cerchiamo le equazioni.

- Poiché la quantità di miscela che vogliamo ottenere è pari a 20 kg, dev'essere uguale a 20 la somma delle quantità, in kg, delle tre qualità di caffè:

$$x + y + z = 20 \qquad \boxed{2}$$

- La quantità, in kg, di caffeina contenuta in x kilogrammi di caffè Arabica è l'1,2% di x, ossia $\frac{1,2}{100}x$. Analogamente le quantità di caffeina contenute nelle due qualità di Robusta sono, rispettivamente, $\frac{2,2}{100}y$ e $\frac{2,6}{100}z$. Quindi la quantità di caffeina totale nella miscela è $\frac{1,2}{100}x + \frac{2,2}{100}y + \frac{2,6}{100}z$. D'altra parte, se vogliamo che i 20 kg di miscela contengano l'1,8% di caffeina, la quantità totale di caffeina

OSSERVAZIONE

Ripetiamo ancora una volta che la scelta delle incognite spesso non è unica: talvolta un problema si può risolvere sia utilizzando tre incognite sia utilizzandone due.

Ad esempio in questo problema avremmo potuto utilizzare solo le due incognite

x = n° kilogrammi di caffè Arabica

y = n° kilogrammi di caffè Robusta di prima qualità

indicando con $20 - x - y$ il numero di kilogrammi di caffè Robusta di seconda qualità.

dev'essere l'1,8% di 20 kg, ossia $\frac{1,8}{100} \cdot 20$. Perciò deve risultare

$$\frac{1,2}{100}x + \frac{2,2}{100}y + \frac{2,6}{100}z = \frac{1,8}{100} \cdot 20 \qquad \boxed{3}$$

- Infine, il costo di x kilogrammi di caffè Arabica è di $10x$ euro, mentre i costi di ciascuna delle due qualità di Robusta sono, in euro, rispettivamente $6y$ e $4z$. Se vogliamo che la miscela costi 7,50 €/kg, il costo totale dei 20 kg di miscela dev'essere $20 \cdot 7,50$ euro. Scriviamo perciò

$$10x + 6y + 4z = 7,50 \cdot 20 \qquad \boxed{4}$$

D Risolviamo il sistema

Il sistema che dobbiamo risolvere è formato dalle equazioni $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ e $\boxed{4}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ \frac{1,2}{100}x + \frac{2,2}{100}y + \frac{2,6}{100}z = \frac{1,8}{100} \cdot 20 \\ 10x + 6y + 4z = 7,50 \cdot 20 \end{cases}$$

che si può così semplificare e risolvere

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 12x + 22y + 26z = 360 \\ 5x + 3y + 2z = 75 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \\ z = 5 \end{cases}$$

E Confrontiamo la soluzione con le condizioni di accettabilità

Si ha $0 \leq 10 \leq 20$, $0 \leq 5 \leq 20$ e $0 \leq 5 \leq 20$, quindi la soluzione trovata è accettabile.

F Formuliamo la soluzione

Per produrre la miscela desiderata occorrono 10 kg di caffè di qualità Arabica, 5 kg di Robusta di prima qualità e 5 kg di Robusta di seconda qualità.