Disequazioni frazionarie

Risolvere le disequazioni **frazionarie**:

1 $\boxed{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2x-1}{x-5}<1}$

Trasportiamo tutti i termini al primo membro e riduciamo a forma normale:

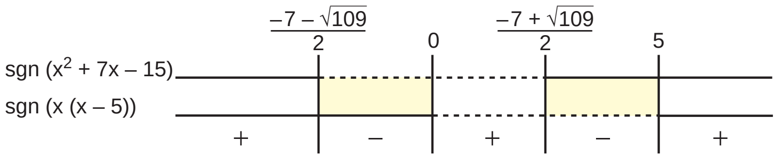
$$\frac{3}{x}+\frac{2x-1}{x-5}-1<0 \Rightarrow \frac{x^2+7x-15}{x(x-5)}<0.$$

Il numeratore si annulla per $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{109}}{2}$, il denominatore si annulla per $x=0$ ed $x=5$.

Inoltre il numeratore risulta *positivo* per valori di x esterni all'intervallo di estremi:

$$\frac{-7-\sqrt{109}}{2}, \qquad \frac{-7+\sqrt{109}}{2}.$$

Il denominatore risulta *positivo* per valori di x esterni all'intervallo di estremi $(0{,}5)$. Si ha allora il grafico:



Poiché la frazione algebrica deve risultare negativa, dovremo considerare gli intervalli in cui i termini della frazione risultano discordi, e quindi la disequazione è soddisfatta per:

$$\frac{-7-\sqrt{109}}{2}<x<0, \qquad \frac{-7+\sqrt{109}}{2}<x<5.$$

2 $\boxed{\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{1}{x-12}<3}$

Riduciamo a forma normale:

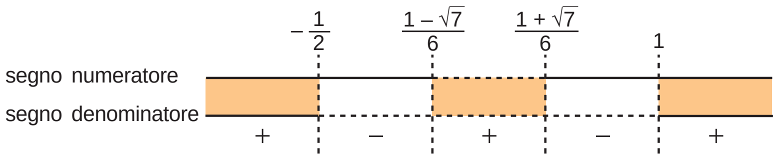
$$\frac{6x^2-2x-1}{(x-1)(2x+1)}>0.$$

Tale disequazione è soddisfatta per valori di x per i quali sia il numeratore che il denominatore assumono lo stesso segno.

Si ha:

$$6x^2-2x+1=0 \Rightarrow x_1=\frac{1-\sqrt{7}}{6}, x_2=\frac{1+\sqrt{7}}{6}; \quad (x-1)(2x+1)=0 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}, x_2=1.$$

Dalla rappresentazione geometrica (v. figura):



si deduce che la disequazione è soddisfatta per:

$$x<-\frac{1}{2}; \quad \frac{1-\sqrt{7}}{6}<x<\frac{1+\sqrt{7}}{6}; \quad x>1.$$

3 $\boxed{\dfrac{3}{2x-1} > \dfrac{1}{3-x}}$

Riducendo a forma normale, si ottiene:

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{1}{3-x} > 0 \Rightarrow \frac{3(3-x)-(2x-1)}{(2x-1)(3-x)} > 0 \Rightarrow \frac{-5x+10}{(2x-1)(3-x)} > 0.$$

Cambiando il segno del numeratore e il segno del fattore $3-x$ del denominatore, si ha:

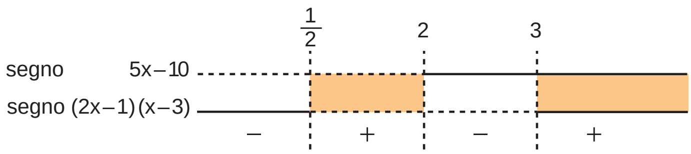
$$\frac{5x-10}{(2x-1)(x-3)} > 0.$$

Il numeratore si annulla per $x = 2$; il denominatore si annulla per $x = \frac{1}{2}$; $\quad x = 3$.

Il numeratore è positivo per $x > 2$.

Il denominatore è positivo per valori di x esterni all'intervallo di estremi $\frac{1}{2}$, 3.

Si ha allora il grafico (v. figura):



Dall'esame del grafico, si deduce che la disequazione è soddisfatta per:

$$\frac{1}{2} < x < 2, \qquad x > 3.$$

4 $\boxed{\dfrac{x-3}{x+1} > x-2}$

Riduciamo la disequazione a forma normale:

$$\frac{x-3}{x+1} - x + 2 > 0 \Rightarrow \frac{x-3-x^2-x+2x+2}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2+2x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x+1}{x+1} < 0.$$

Si ha:

- $x^2 - 2x + 1 > 0$, per ogni $x \neq 1$.

Poiché il Δ del trinomio è nullo, il trinomio risulta concorde con il suo primo coefficiente e quindi positivo per qualsiasi valore di x tranne che per $x = 1$, valore per il quale il trinomio si annulla.

Inoltre:

- $x + 1 > 0$, per $\quad x > -1$.

Rappresentando i risultati ottenuti graficamente (v. figura), da cui si ricava che la disequazione è verificata per:

$$x < -1.$$