Risolti

Sistemi di disequazioni

Risolvere i seguenti **sistemi**:

1 $\begin{cases} x^2+x-2>0 \\ 2x-1>0 \end{cases}$

Risolviamo la prima disequazione, che è di secondo grado. Risulta:

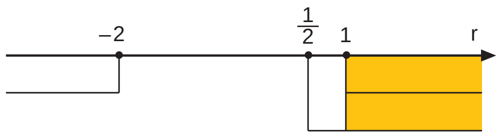
$$\Delta = 1+8=9>0, \qquad x_1=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\begin{cases}1\\-2,\end{cases} \qquad a=1>0.$$

I valori che rendono il trinomio concorde con il primo coefficiente sono quelli esterni all'intervallo delle radici, cioè:

$$S_1=\{x|x<-2, \quad x>1\}.$$

La seconda disequazione è di primo grado ed è soddisfatta per: $x>\frac{1}{2}$, cioè: $S_2=\left\{x|x>\frac{1}{2}\right\}$.

Rappresentando graficamente le soluzioni ottenute, si ha (v. figura):



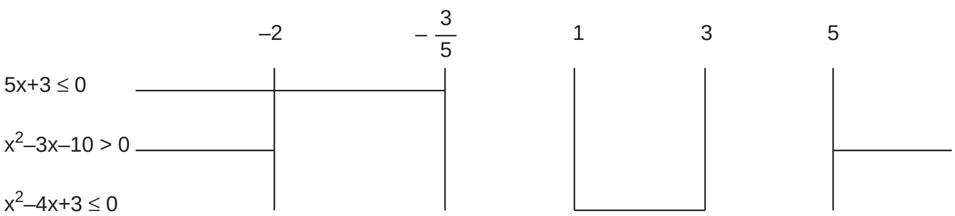
Come risulta dal grafico, l'insieme delle soluzioni del sistema è:

$$S=S_1\cap S_2=\{x|x>1\}.$$

2 $\begin{cases} 5x+3\le 0 \\ x^2-3x-10>0 \\ x^2-4x+3\le 0 \end{cases}$

La prima disequazione è soddisfatta per $x\le -\frac{3}{5}$. Quanto alla seconda, poiché le radici dell'equazione $x^2-3x-10=0$ sono -2 o 5, si hanno soluzioni per $x<-2$ ed $x>5$.
Quanto alla terza disequazione, poiché le radici dell'equazione $x^2-4x+3=0$ sono 1 e 3, si hanno soluzioni per $1\le x\le 3$.

Per individuare le eventuali soluzioni del sistema, utilizziamo la visualizzazione grafica (v. figura):



Poiché non esistono intervalli nei quali siano soddisfatte simultaneamente le tre disequazioni, il sistema non ammette soluzioni.

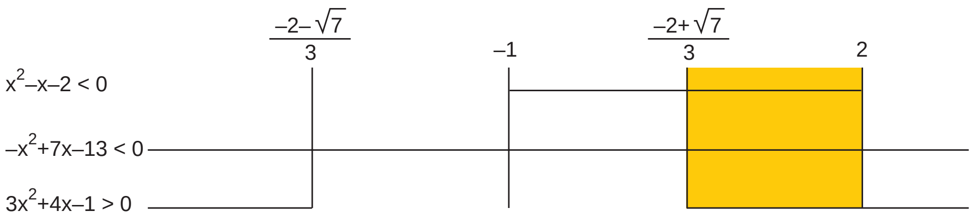
3 $\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ -x^2 + 7x - 13 < 0 \\ 3x^2 + 4x - 1 > 0 \end{cases}$

Essendo $x^2 - x - 2 = 0$, per $x = -1$ e $x = 2$, la prima disequazione ha soluzioni per $-1 < x < 2$.

La seconda disequazione è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}$.

La terza disequazione, essendo $3x^2 + 4x - 1 = 0$, per $x = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$, è soddisfatta per $x < \frac{-2 - \sqrt{7}}{3}$ e per $x > \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$.

Le eventuali soluzioni del sistema dato sono visualizzate dal grafico in figura:



Il sistema ammette soluzioni per $\frac{-2 + \sqrt{7}}{3} < x < 2$, perché in tale intervallo sono soddisfatte simultaneamente le tre disequazioni.

4 $\begin{cases} x^2 \le x \\ \frac{1}{x} \ge x \end{cases}$

La prima disequazione, scritta nel modo seguente: $x^2 - x \le 0$, è soddisfatta per $0 \le x \le 1$. La seconda disequazione si può scrivere come segue: $\frac{1}{x} - x \ge 0$, cioè: $\frac{1 - x^2}{x} \ge 0$, ossia: $\frac{(1 - x)(1 + x)}{x} \ge 0$.

Questa disequazione, come è facile verificare, è soddisfatta per $x \le -1$ e per $0 < x \le 1$.

Dal grafico (v. figura), si deduce che il sistema ammette soluzioni nell'intervallo $0 < x \le 1$.