1. $(x-2)^3 + x^2 = x^3 + 6x(2-x)$

Svolgiamo i calcoli e scriviamo l'equazione in forma normale

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x^2 = x^3 + 12x - 6x^2$

$x^2 - 8 = 0$

Si tratta di un'equazione in cui manca il termine in x; risolvendo rispetto a x^2 otteniamo

$$x^2 = 8 \quad \text{da cui} \quad x = \pm\sqrt{8} \quad \text{cioè} \quad x = \pm 2\sqrt{2}$$

L'insieme delle soluzioni è $S = \{-2\sqrt{2}, +2\sqrt{2}\}$.

2. $(x-1)(3x+1) = 2x - 1$

Svolgiamo i calcoli e scriviamo l'equazione in forma normale

$3x^2 - 3x + x - 1 = 2x - 1 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 4x = 0$

L'equazione è incompleta perché manca il termine noto; raccogliamo x a fattor comune e applichiamo la legge di annullamento del prodotto:

$x(3x-4) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \;\vee\; 3x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \;\vee\; x = \frac{4}{3}$

L'insieme delle soluzioni è $S = \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$.

3. $2x + 1 = \dfrac{1}{1-2x}$

L'equazione è frazionaria di dominio $D = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Svolgiamo i calcoli e riduciamo l'equazione in forma normale:

$(2x+1)(1-2x) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 - 4x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 4x^2 = 0$

L'equazione ha due soluzioni coincidenti uguali a zero, quindi $S = \{0\}$.

Equazioni complete

1. $6x^2 - 17x + 5 = 0$

Calcoliamo il discriminante: $\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5 = 289 - 120 = 169$

$\Delta > 0$, quindi le soluzioni sono reali e distinte, determiniamole:

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{169}}{12} = \frac{17 \pm 13}{12} = \begin{cases} \dfrac{17-13}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \\[2ex] \dfrac{17+13}{12} = \dfrac{30}{12} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Allora $S = \left\{\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right\}$.

2. $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Calcoliamo il discriminante: $\Delta = (+4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$

$\Delta = 0$, quindi le soluzioni sono reali e coincidenti: $x = \dfrac{-4 \pm 0}{2 \cdot 4} = -\dfrac{1}{2}$

Allora $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Questo risultato si poteva dedurre subito osservando l'equazione; infatti il polinomio al primo membro è il quadrato di un binomio. L'equazione può quindi essere scritta nella forma:

$(2x+1)^2 = 0$ cioè, tenendo conto che una potenza vale zero solo se è zero la base,

$2x + 1 = 0$ da cui $x = -\dfrac{1}{2}$.

3. $(3x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)(x^2+x+1)$

Riduciamo l'equazione in forma normale:

$$9x^2+1-6x+\frac{1}{2}(x^3-1-3x^2+3x)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x^3-1)$$

$$9x^2+1-6x+\cancel{\frac{1}{2}x^3}-\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=\cancel{\frac{1}{2}x^3}-\cancel{\frac{1}{2}}$$

$$18x^2+2-12x-3x^2+3x-1=0 \quad \rightarrow \quad 15x^2-9x+1=0$$

Calcoliamo il discriminante: $\Delta=81-60=21$

$\Delta>0$, quindi le soluzioni sono reali e distinte: $x=\frac{9\pm\sqrt{21}}{30}=\begin{cases}\frac{9-\sqrt{21}}{30}\\ \frac{9+\sqrt{21}}{30}\end{cases}$

Allora $S=\left\{\frac{9-\sqrt{21}}{30},\ \frac{9+\sqrt{21}}{30}\right\}$.

4. $\frac{x^2+1-5x}{15}=-\frac{1-3x}{15}-\frac{8}{5}$

Calcoliamo il *m.c.m.* fra i denominatori, quindi scriviamo l'equazione nella sua forma normale.

$$x^2+1-5x=-1+3x-24 \quad \rightarrow \quad x^2-8x+26=0$$

Calcoliamo il discriminante: $\Delta=64-104=-40<0$, quindi non esistono soluzioni reali: $S=\varnothing$.

5. $\frac{2x-1}{x-1}+\frac{3x+1}{x-3}=\frac{-2}{x^2-4x+3}$

Si tratta di un'**equazione frazionaria.**
Prima di calcolare il *m.c.m.* fra i denominatori, dobbiamo stabilire il dominio dell'equazione; scomponia quindi in fattori il denominatore della terza frazione:

$$\frac{2x-1}{x-1}+\frac{3x+1}{x-3}=\frac{-2}{(x-1)(x-3)}$$

Allora $D=R-\{1,3\}$ e, per i valori di x che gli appartengono, possiamo scrivere l'equazione in forma norm

$$(2x-1)(x-3)+(3x+1)(x-1)=-2 \quad \rightarrow \quad 2x^2-6x-\cancel{x}+3+3x^2-3x+\cancel{x}-1+2=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 5x^2-9x+4=0$$

Calcoliamo il discriminante: $\Delta=81-80=1$

$\Delta>0$, quindi le soluzioni sono reali e distinte: $x=\frac{9\pm1}{10}=\begin{cases}\frac{4}{5}\\ 1\end{cases}$

Poichè $1\notin D$, l'insieme delle soluzioni è $S=\left\{\frac{4}{5}\right\}$.

6. $-\frac{3}{x}+x=2$

l dominio dell'equazione è $D=R-\{0\}$. Scriviamo l'equazione in forma normale:

$$-3 + x^2 = 2x \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2-4}{2} = -1 \\ \frac{2+4}{2} = 3 \end{cases}$$

Dunque, poiché entrambe le soluzioni appartengono a D, l'insieme delle soluzioni è $S = \{-1, 3\}$.

7. $\frac{x+9}{x^2-9} + 1 - \frac{x}{x+3} = \frac{5}{x-3} - \frac{x^2}{9-x^2}$

È un'equazione frazionaria, determiniamo il cominio: $D = R - \{+3, -3\}$

Eseguiamo i calcoli e scriviamo l'equazione in forma normale:

$$\frac{x + \cancel{9} + x^2 - \cancel{9} - x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{5(x+3) + x^2}{(x-3)(x+3)} \quad \rightarrow \quad x + x^2 - x^2 + 3x = 5x + 15 + x^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x^2 + x + 15 = 0$$

Calcoliamo il discriminante: $\Delta = 1 - 60 = -59$

$\Delta < 0$, quindi non esistono soluzioni reali: $S = \varnothing$.