1. $x^3 - 3x^2 + x - 3 > 0$

Scomponiamo il polinomio al primo membro:

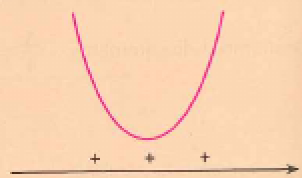
$x^2(x-3) + (x-3) > 0 \qquad \rightarrow \qquad (x^2+1)(x-3) > 0$

Studiamo il segno di ogni fattore del prodotto:

$x^2 + 1 > 0 \qquad \forall x \in R$ (***figura 15***)

$x - 3 > 0 \qquad x > 3$

Figura 15



Costruiamo la tabella dei segni:

		3	
segno di x^2+1	+		+
segno di $x-3$	−		+
prodotto	−		+
S			———

$x > 3$

2. $x^3 - 4x^2 + x + 6 < 0$

Scomponiamo il polinomio in fattori con la regola di Ruffini:

$P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Il polinomio al primo membro equivale al prodotto $(x^2 - 5x + 6)(x+1)$ e quindi la disequazione può essere scritta in questo modo:

$(x^2 - 5x + 6)(x+1) < 0$

Studiamo il segno di ogni fattore:

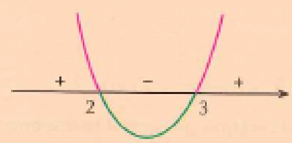
- $x^2 - 5x + 6 > 0$

  Risolviamo l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$: $\quad x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

  La disequazione è verificata per $x < 2 \ \vee \ x > 3$ (***figura 16***).

- $x + 1 > 0 \qquad x > -1$

Figura 16



Costruiamo la tabella dei segni:

		−1		2		3	
segno di x^2-5x+6	+		+		−		+
segno di $x+1$	−		+		+		+
prodotto	−		+		−		+
S	———				———		

$x < -1 \ \vee \ 2 < x < 3$

3. $x^5 - x^4 - 9x^3 + 9x^2 \geq 0$

Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro, eseguendo prima un raccoglimento totale e poi uno parziale:

$x^2(x^3 - x^2 - 9x + 9) \geq 0$

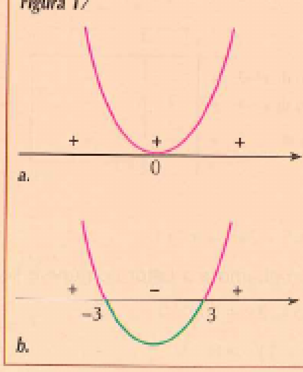
$x^2[x^2(x-1) - 9(x-1)] \geq 0$

$x^2(x^2 - 9)(x-1) \geq 0$

Studiamo il segno di ogni fattore

- $x^2 \geq 0 \qquad \forall x \in R$ (si annulla in $x = 0$) (***figura 17a***)
- $x^2 - 9 \geq 0 \qquad x \leq -3 \ \vee \ x \geq 3$ (***figura 17b***)
- $x - 1 \geq 0 \qquad x \geq 1$

Figura 17



Costruiamo la tabella dei segni:

	$x<-3$	$-3<x<0$	$0<x<1$	$1<x<3$	$x>3$
segno di x^2	+	+	+	+	+
segno di x^2-9	+	−	−	−	+
segno di $x-1$	−	−	−	+	+
prodotto	−	+	+	−	+

$$-3 \le x \le 1 \;\vee\; x \ge 3$$

4. $x^3 < 8$

Trasportiamo il termine 8 al primo membro e scomponiamo in fattori la differenza di cubi:

$x^3 - 8 < 0$

$(x-2)(x^2+2x+4) < 0$

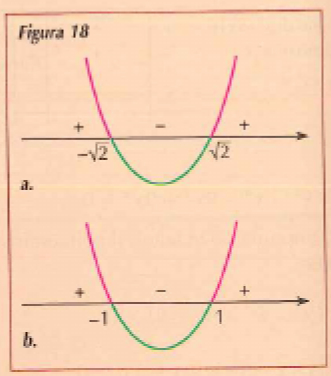
Osserviamo che, essendo il secondo fattore positivo $\forall x \in R$ (il discriminante è negativo, quindi la parabola, avendo concavità verso l'alto, si trova solo nel semipiano delle ordinate positive), il suo segno non influisce su quello del prodotto. Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione data coincide con quello della disequazione

$$x - 2 < 0 \qquad \text{cioè} \qquad x < 2.$$

5. $x^4 - 3x^2 + 2 > 0$

Possiamo pensare il polinomio al primo membro come un trinomio caratteristico nell'incognita x^2 e quindi possiamo scrivere la disequazione

$$(x^2-2)(x^2-1) > 0$$



Studiamo il segno di ogni fattore del prodotto:

- $x^2 - 2 > 0 \qquad x < -\sqrt{2} \;\vee\; x > \sqrt{2}$ (***figura 18a***)
- $x^2 - 1 > 0 \qquad x < -1 \;\vee\; x > 1$ (***figura 18b***)

Costruiamo la tabella dei segni:

	$x<-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}<x<-1$	$-1<x<1$	$1<x<\sqrt{2}$	$x>\sqrt{2}$
segno di x^2-2	+	−	−	−	+
segno di x^2-1	+	+	−	+	+
prodotto	+	−	+	−	+

$$x < -\sqrt{2} \;\vee\; -1 < x < 1 \;\vee\; x > \sqrt{2}$$

6. $x^3 - 2x^2 + x \ge 0$

Raccogliamo x a fattor comune e scomponiamo

$x(x^2 - 2x + 1) \ge 0$

$x(x-1)^2 \ge 0$

Studiamo il segno di ciascun fattore:

- $x \geq 0$
- $(x-1)^2 \geq 0 \qquad \forall x \in R \qquad$ (il polinomio si annulla per $x = 1$)

Tabella dei segni:

	$x<0$	$0<x<1$	$x>1$
segno di x	$-$	$+$	$+$
segno di $(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$
prodotto	$-$	$+$	$+$

S: $x \geq 0$

7. $x^4 + 3x^2 > 0$

Raccogliamo x^2 a fattor comune: $\quad x^2(x^2+3) > 0$

Osserviamo che entrambi i fattori sono sempre positivi se escludiamo lo zero dove il primo si annulla; il loro prodotto è quindi sempre positivo $\forall x \neq 0$ e quindi

$$S = R - \{0\}.$$

8. $-12x^4 + 39x^2 - 9 \geq 0$

Cambiamo i segni: $\quad 12x^4 - 39x^2 + 9 \leq 0$

scomponiamo: $\quad 3(4x^2-1)(x^2-3) \leq 0$

possiamo dividere per 3: $\quad (4x^2-1)(x^2-3) \leq 0$

Studiamo il segno di ciascun fattore:

- $4x^2 - 1 \geq 0 \qquad x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2} \qquad$ (*figura 19a*)
- $x^2 - 3 \geq 0 \qquad x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} \qquad$ (*figura 19b*)

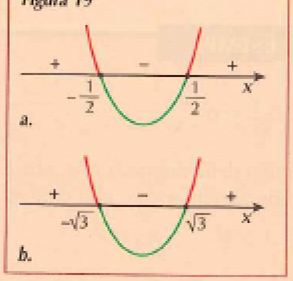


Figura 19

Tabella dei segni:

	$x<-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}<x<-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<\sqrt{3}$	$x>\sqrt{3}$
segno di $4x^2-1$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
segno di x^2-3	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
prodotto	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

S: $-\sqrt{3} \leq x \leq -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{3}$