1. Data la parabola di equazione $y = x^2 + 2x$ ed il fascio di rette di centro $P(0, -2)$, vogliamo determinare le rette del fascio che sono tangenti alla parabola.

Scriviamo l'equazione del fascio di centro P: $y + 2 = m(x - 0)$ cioè $y = mx - 2$

Impostiamo il sistema fra le equazioni delle due curve

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = mx - 2 \end{cases}$$

da cui, eliminando la variabile y, ricaviamo l'equazione risolvente

$x^2 + x(2 - m) + 2 = 0$

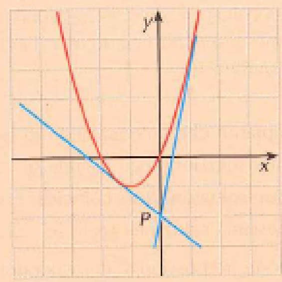
Affinchè la retta sia tangente alla parabola, deve essere $\Delta = 0$:

$(2 - m)^2 - 8 = 0$ da cui $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$

In corrispondenza di questi valori di m, si hanno le due rette tangenti alla parabola (***figura 14***)

$y = (2 + 2\sqrt{2})x - 2$ e $y = (2 - 2\sqrt{2})x - 2$

Figura 14



2. Vogliamo determinare l'equazione della retta passante per il punto $P(4, 0)$ e tangente alla parabola di equazione $y = x^2 - 4x$.

Poichè il punto P appartiene alla parabola (prova a sostituire le sue coordinate nell'equazione della parabola), ci aspettiamo di trovare una sola retta tangente.
L'equazione del fascio di rette per P è $y = m(x - 4)$.

Per determinare fra queste rette quella tangente alla parabola, scriviamo il sistema formato dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = m(x - 4) \end{cases}$$

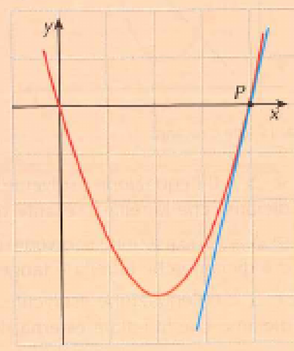
L'equazione risolvente è $x^2 - 4x = m(x - 4)$

$$x^2 - x(4 + m) + 4m = 0$$

La condizione di tangenza impone che il discriminante sia nullo $(4 + m)^2 - 16m = 0$ da cui $m = 4$.

La retta tangente, come avevamo previsto, è una sola ed ha equazione (***figura 15***): $y = 4(x - 4)$.

Figura 15



3. Scriviamo l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ che ha vertice in $V(1, -1)$ in modo che sia tangente alla retta di equazione $y = x - 3$.

L'informazione sul vertice della parabola ci permette di scrivere le due equazioni:

$$-\frac{b}{2a} = 1 \quad \text{e} \quad -1 = a + b + c$$

Per determinare la condizione di tangenza consideriamo l'equazione generica della parabola:

- sistema parabola-retta: $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = x - 3 \end{cases}$
- equazione risolvente: $ax^2 + bx + c = x - 3 \rightarrow ax^2 + x(b - 1) + c + 3 = 0$
- condizione di tangenza: $(b - 1)^2 - 4a(c + 3) = 0$

Possiamo adesso scrivere le tre equazioni in sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ -1 = a + b + c \\ (b-1)^2 - 4a(c+3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

La parabola cercata ha equazione (***figura 16***): $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

Figura 16