1 Determinare asse, vertice fuoco e direttrice della parabola $y = x^2 - 6x + 8;$

In questo caso è $a = 1$, $b = -6$, $c = 8$. In base alle formule relative alla parabola del tipo $y = ax^2 + bx + c$, si può affermare che l'asse è la retta di equazione $x = 3$, il vertice è il punto $V(3, -1)$, il fuoco è il punto $F\left(3, -\frac{3}{4}\right)$ e la direttrice è la retta $y = -\frac{5}{4}$.

2 *Determinare, se esistono, le coordinate dei punti di intersezione della parabola di equazione:* $y = x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$, *con la retta di equazione:* $x - 2y - 7 = 0$.

Le coordinate dei punti di intersezione, se esistono, sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \\ x - 2y - 7 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda equazione il valore della y fornito dalla prima, si ottiene l'equazione $x^2 - 3x + 2 = 0$, che ha per soluzioni $x = 1$ ed $x = 2$.

I punti di intersezione sono quindi $A(1, -3)$ e $B\left(2, -\frac{5}{2}\right)$.

3

Sia data la parabola di equazione: $y = x^2 - 2x$. (1)

Determinare:

a) *le coordinate del vertice, del fuoco e l'equazione della direttrice;*

b) *dopo aver verificato che il punto* $A\left(-2, -\frac{5}{4}\right)$ *appartiene alla direttrice, determinare le equazioni delle rette tangenti alla (1) per A;*

c) *verificare infine che tali rette sono perpendicolari.*

Soluzione.

a) Le coordinate del vertice e del fuoco si ottengono ricordando che:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (1, -1); \qquad F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right) = \left(1, -\frac{3}{4}\right),$$

mentre la direttrice ha equazione: $y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{5}{4}$.

b) Le coordinate del punto A soddisfano l'equazione della direttrice; pertanto A è un suo punto. Essendo A punto esterno alla parabola, per esso esistono due rette tangenti ad essa. Per determinarne le equazioni scriviamo la retta generica appartenente al fascio proprio di rette di centro A:

$$y + \frac{5}{4} = m(x+2), \qquad \text{ossia:} \qquad y = mx + 2m - \frac{5}{4}, \tag{2}$$

e determiniamo m in modo che la retta (2) tagli la parabola (1) in due punti coincidenti. A tal fine risolviamo il sistema costituito dalle equazioni (1) e (2):

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = mx + 2m - \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow 4x^2 - 4(2+m)x + 5 - 8m = 0.$$

Dovendo quest'ultima equazione avere radici coincidenti, deve essere:

$\frac{\Delta}{4}=4(2+m)^2-4(5-8m)=0$, cioè: $m^2+12m-1=0$, che ammette le soluzioni: $m=-6\pm\sqrt{37}$.

Sostituendo i valori di m trovati nella (2), si determinano le equazioni delle rette tangenti cercate, ossia:

(3) $$y+\frac{5}{4}=(-6+\sqrt{37})(x+2), \qquad y+\frac{5}{4}=(-6-\sqrt{37})(x+2).$$

c) Le rette (3) sono perpendicolari; infatti i loro coefficienti angolari:

$$m=-6+\sqrt{37} \quad \text{ed} \quad m'=-6-\sqrt{37},$$

soddisfano la relazione di perpendicolarità: $mm'=-1$, come è facile verificare.

Questo fatto si può osservare direttamente dall'equazione $m^2+12m-1=0$, nella quale è:

$$m_1\cdot m_2=\frac{c}{a}=-1.$$

4 *Scrivere l'equazione della parabola avente per fuoco F il punto di coordinate* $(0,2)$ *e direttrice d la retta di equazione* $y=-2$.

L'equazione della parabola si ottiene imponendo che il punto generico $P(x,y)$ abbia uguale distanza sia da F che dalla retta d.

Traducendo algebricamente tale uguaglianza si ha: $\sqrt{x^2+(y-2)^2}=|y+2|$.

Elevando al quadrato ed eliminando i termini opposti si ottiene l'equazione:

(1) $$y=\frac{1}{8}x^2, \quad \text{che è quella della parabola cercata.}$$

Oppure, se $F(0,2)$ e $d)\ y=-2$, le formule relative alla parabola $y=ax^2+bx+c$, forniscono il sistema:

$$\begin{cases} 0=-\dfrac{b}{2a} \\ 2=\dfrac{1}{4a}-\dfrac{b^2-4ac}{4a} \\ -2=-\dfrac{1}{4a}-\dfrac{b^2-4ac}{4a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ \dfrac{1}{4a}+c=2 \\ -\dfrac{1}{4a}+c=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ a=\dfrac{1}{8}, \end{cases}$$

e si ritrova la (1).

5 *Trovare l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, passante per il punto* $A(1,3)$ *e avente vertice* $V(2,4)$.

L'equazione della parabola richiesta è del tipo $y=ax^2+bx+c$.
Le condizioni assegnate si traducono nel sistema:

$$\begin{cases} 3=a+b+c, & \text{perché la parabola passi per il punto } A, \\ 4=4a+2b+c, & \text{perché la parabola passi per il punto } V, \\ 2=-\dfrac{b}{2a}, & \text{perché l'ascissa del vertice risulti uguale a 2.} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ha $a=-1$, $b=4$, $c=0$.

L'equazione della parabola richiesta è $y=-x^2+4x$.

Le condizioni date possono essere tradotte anche nel sistema:

$$\begin{cases} 3=a+b+c & \text{perché la parabola passi per il punto } A, \\ \left.\begin{array}{l} 2=-\dfrac{b}{2a} \\ 4=-\dfrac{b^2-4ac}{4a} \end{array}\right\} & \text{perché le coordinate del vertice } V \text{ sono } \left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a}\right), \end{cases}$$

ma i calcoli da eseguire sono più laboriosi rispetto ai precedenti.

6 *Trovare l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e passante per i punti* $A(1,6)$, $B(-2,-6)$, $C(3,4)$.

L'equazione di una parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse delle y, è della forma $y=ax^2+bx+c$.
Dovremo determinare i valori di a, b e c in modo che la parabola corrispondente passi per i punti dati.

Si ha quindi il sistema:

$$\begin{cases} 6 = a + b + c, & \text{perché la parabola passi per il punto } A, \\ -6 = 4a - 2b + c, & \text{perché la parabola passi per il punto } B, \\ 4 = 9a + 3b + c, & \text{perché la parabola passi per il punto } C, \end{cases}$$

che ha per soluzioni $a = -1$, $b = 3$, $c = 4$. La parabola richiesta ha equazione $y = -x^2 + 3x + 4$.

7 *Determinare a, b, c, in modo che la parabola $y = ax^2 + bx + c$ passi per i punti:*

$$A(0, -1),\ B(1, 0),\ C(2, 5).$$

Trovare poi il vertice, il fuoco, l'asse, la direttrice e le intersezioni con gli assi coordinati.

Perché la parabola passi per i punti A, B, C, deve risultare il sistema:

$$\begin{cases} -1 = c \\ 0 = a + b + c \\ 5 = 4a + 2b + c, \end{cases} \quad \text{che, risolto, dà :} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1, \end{cases}$$

e perciò l'equazione della parabola è: $y = 2x^2 - x - 1$.

Le coordinate del vertice sono: $\left(\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$; il fuoco ha per coordinate: $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$; l'asse di simmetria è la retta di equazione $x = \frac{1}{4}$ e la direttrice è la retta di equazione $y = -\frac{5}{4}$.

Inoltre la parabola interseca l'asse x nei punti di coordinate $(1, 0)$, e $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e l'asse y nel punto di coordinate $(0, -1)$.

8 *Verificare che il punto $A(2,\ 0)$ sta sulla parabola di equazione: $y = 3x^2 - 12$.*
Trovare poi l'equazione della tangente alla parabola, condotta per il punto A.

Una retta **qualsiasi**, uscente dal punto $A(2,\ 0)$, ha, come sappiamo, per equazione (1):

(1) $$y = m(x - 2),$$

e perché questa retta risulti tangente alla parabola considerata, bisogna determinare m in modo che il sistema:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 12 \\ y = m(x - 2), \end{cases} \quad \text{abbia due soluzioni coincidenti.}$$

Sostituendo, nella prima equazione, al posto della y il suo valore dato dalla seconda equazione, si ottiene:

$$mx - 2m = 3x^2 - 12, \quad \text{ossia:} \quad 3x^2 - mx + 2m - 12 = 0.$$

Ora, perché questa equazione abbia due radici coincidenti, deve essere nullo il suo discriminante, cioè deve risultare:

$$\Delta = m^2 - 12(2m - 12) = 0, \text{ ossia: } m^2 - 24m + 144 = 0, \text{ od anche: } (m - 12)^2 = 0, \text{ cioè: } m = 12.$$

Sostituendo questo valore al posto di m nella (1), otteniamo l'equazione della tangente alla parabola, condotta per il punto A. Essa è:

$$y = 12x - 24.$$

Oppure, più semplicemente, applicando la *legge dello sdoppiamento*, si ha immediatamente:

$$\frac{y + 0}{2} = 3 \cdot x \cdot 2 - 12 \Rightarrow \frac{y}{2} = 6x - 12 \Rightarrow y = 12x - 24.$$

9 *Trovare le equazioni delle rette tangenti alla parabola:*

$$y = x^2 + 3x + 5, \textit{ condotte dal punto } A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Una retta **qualsiasi**, uscente dal punto $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, ha, come è noto, per equazione:

(1) $$y = m\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2},$$

e perché questa retta risulti tangente alla parabola considerata, bisogna determinare m in modo che il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x + 5 \\ y = m\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}, \end{cases} \quad \text{abbia due soluzioni coincidenti.}$$

Sostituendo, nella prima equazione, al posto della y il suo valore dato dalla seconda equazione, si ottiene: $m\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = x^2 + 3x + 5$ e, con facili calcoli, in definitiva si ha: $x^2 + (3 - m)x - \frac{1}{2}m + \frac{7}{2} = 0$.

Ora, perché questa equazione abbia due radici coincidenti, deve essere nullo il suo discriminante, cioè deve risultare:

$$\Delta = (3 - m)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}m + \frac{7}{2}\right) = 0,$$

ossia, sviluppando e semplificando: $m^2 - 4m - 5 = 0$, le cui radici sono: $m_1 = 5$, $m_2 = -1$.

Sostituendo questi valori trovati al posto di m nella (1), otteniamo le equazioni delle due rette tangenti alla parabola, condotte per il punto A.

Esse sono:

$$y = 5x + 4; \quad y = -x + 1.$$

10 *Scrivere l'equazione della parabola ad asse parallelo all'asse y passante per il punto $A(2,0)$ e tangente alla retta $y=-4x+7$ nel punto B di ascissa 1. Si determini il punto comune Q alla retta data e all'asse della parabola.*

L'equazione della parabola:

(1) $$y = ax^2 + bx + c,$$

si determina risolvendo il sistema nelle incognite a, b, c formato dalle equazioni che si ottengono imponendo alla (1) di contenere i punti A e B, e dalla condizione che la retta $y=-4x+7$ risulti tangente alla parabola (1). La suddetta condizione di tangenza impone che il seguente sistema abbia radici coincidenti:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = -4x + 7, \end{cases} \quad \text{cioè:} \quad ax^2 + (b+4)x + c - 7 = 0, \quad \text{da cui:} \quad (b+4)^2 - 4a(c-7) = 0.$$

Concludendo, i coefficienti della (1) si trovano risolvendo il sistema:

(2) $$\begin{cases} 4a + 2b + c = 0, & \text{passaggio per } A \\ a + b + c = 3, & \text{passaggio per } B \\ (b+4)^2 - 4a(c-7) = 0, & \Delta = 0. \end{cases}$$

Eliminando c dalla 1ª e 2ª equazione e sostituendo nella 3ª il valore di a e di c, si trova il sistema equivalente al (2):

$$\begin{cases} 3a + b = -3 \\ c = 3 - a - b \\ b^2 + 12b + 36 = 0, \end{cases} \quad \text{il quale ammette la soluzione:} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 8. \end{cases}$$

Sostituendo i valori trovati nell'equazione (1) si ricava: $y = x^2 - 6x + 8$.

Per determinare il punto Q basta risolvere il sistema costituito dall'equazione della retta data e dall'equazione dell'asse della parabola.

L'equazione dell'asse della parabola è: $x = -\dfrac{b}{2a} = 3$; pertanto si ha il sistema:

$$\begin{cases} y = -4x + 7 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow Q(3, -5).$$