1 *Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:*

a) $3^{x+3} > 9$; *b*) $\dfrac{1}{2^x} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; *c*) $e^{2x} - 3 > 0$.

Si ha:

a) $3^{x+3} > 9 \Rightarrow 3^{x+3} > 3^2 \Rightarrow x + 3 > 2 \Rightarrow x > -1$;

b) $\dfrac{1}{2^x} < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2^x > \sqrt{2} \Rightarrow 2^x > 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$;

c) $e^{2x} - 3 > 0 \Rightarrow e^{2x} > 3 \Rightarrow 2x\ln e > \ln 3 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}\ln 3$.

2 *Risolvere le disequazioni esponenziali:*

a) $|x-1|^{\frac{1}{x+1}} > 0$; *b*) $x^{e^x - 1} > 1$; *c*) $e^{|2x|-1} > 1$; *d*) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x > \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$.

Soluzioni.

a) Per $x \neq 1 \Rightarrow |x-1| > 0$ e la disequazione è sempre verificata, purché $x \neq -1$. Per $x = 1$, si ha: $0^1 > 0$, e la disequazione non è verificata. Pertanto: $S = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$.

b) $x^{e^x-1} > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^{e^x-1} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (e^x - 1)\ln x > \ln 1 = 0. \end{cases}$

Essendo: $e^x - 1 > 0$, per $x > 0$; $\ln x > 0$, per $x > 1$, la disequazione è verificata per $x > 1$.

c) $e^{|2x|-1} > 1 \Rightarrow (|2x| - 1)\ln e > \ln 1 \Rightarrow |2x| - 1 > 0 \Rightarrow |2x| > 1 \Rightarrow x < -\dfrac{1}{2}; x > \dfrac{1}{2}$.

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x > \left(\dfrac{3}{2}\right)^x \Rightarrow x\log\dfrac{2}{3} > x\log\dfrac{3}{2} \Rightarrow x\left(\log\dfrac{2}{3} - \log\dfrac{3}{2}\right) > 0 \Rightarrow x(\log 2 - \log 3 - \log 3 + \log 2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(2\log 2 - 2\log 3) > 0 \Rightarrow x\log\dfrac{4}{9} > 0 \Rightarrow x < 0$, (*NB.* $\log\dfrac{4}{9} < 0$).

3 *Risolvere la seguente disequazione esponenziale:* $27^x + 12^x > 2 \cdot 8^x$.

Si ha: $3^{3x} + 2^{2x} \cdot 3^x > 2 \cdot 2^{3x}$, da cui: $\dfrac{3^{3x}}{2^{3x}} + \dfrac{2^{2x} \cdot 3^x}{2^{3x}} > 2$, cioè $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^x - 2 > 0$.

Posto $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = y$, si ha la disequazione algebrica: $y^3 + y - 2 > 0$, il cui primo membro ammette la radice $y = 1$; quindi, utilizzando la regola di RUFFINI:

	1	0	1	−2
1		1	1	2
	1	1	2	0

può scomporsi in $(y-1)(y^2 + y + 2)$. Poiché il fattore $y^2 + y + 2$ è sempre positivo (avendo il discriminante negativo ed il coefficiente di y^2 positivo), la disequazione algebrica si riduce ad $y - 1 > 0$. Ne segue: $y > 1$, e quindi anche: $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x > 1$, ossia: $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x > \left(\dfrac{3}{2}\right)^0$, da cui: $x > 0$.

4 *Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche*:

a) $\log x + \log(x-1) < \log(5x-8)$; *b*) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < 2$; *c*) $\log(x^2-2x+4) \geq \log 4(x-1)$.

Soluzioni.

a) Deve essere: $\begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \\ 5x-8 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \dfrac{8}{5}$.

$\log x + \log(x-1) < \log(5x-8) \Rightarrow \log x(x-1) < \log(5x-8) \Rightarrow x(x-1) < 5x-8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 < 0 \Rightarrow 2 < x < 4$.

b) Deve essere $x > -1$.

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4} \Rightarrow x+1 > \dfrac{1}{4} \Rightarrow x > -\dfrac{3}{4}$.

c) $\log(x^2-2x+4) \geq \log 4(x-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-2x+4 > 0 \\ 4x-4 > 0 \\ x^2-2x+4 \geq 4x-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \\ x > 1 \\ x^2-6x+8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \\ x \leq 2;\ x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow 1 < x \leq 2;\ x \geq 4.$$

5 *Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche*:

a) $\log_5 x < \log_7 x$; *b*) $\log^2 x + \log x - 2 < 0$; *c*) $\dfrac{\log_3 x}{\log_{\frac{1}{3}} x} < 0$.

Soluzioni.

a) $\log_5 x < \log_7 x \Rightarrow \dfrac{\log x}{\log 5} < \dfrac{\log x}{\log 7}$. Ora $\log 7 > \log 5 > 0$, quindi:

$$\frac{\log x}{\log 5} < \frac{\log x}{\log 7} \Rightarrow (\log 7 - \log 5)\log x < 0 \Rightarrow \log x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1.$$

b) Posto $t = \log x$, si ha:

$$\log^2 x + \log x - 2 < 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 < 0 \Rightarrow -2 < t < 1 \Rightarrow -2 < \log x < 1 \Rightarrow \frac{1}{100} < x < 10.$$

c) Deve essere: $x > 0$; $\log_{\frac{1}{3}} x \neq 0$, cioè $x \neq 1$.

$$\frac{\log_3 x}{\log_{\frac{1}{3}} x} < 0 \Rightarrow \frac{\log_3 x}{\log_3 \dfrac{1}{x}} < 0 \Rightarrow \frac{\log_3 x}{-\log_3 x} < 0 \Rightarrow x > 0,\ x \neq 1.$$

6 *Risolvere le disequazioni*:

a) $\ln(2ex - x^2) > 2$; *b*) $\ln\ln(x+1) > 0$; *c*) $\sqrt{\ln e^x} > 2$; *d*) $\log x \geq \sqrt{1-x}$.

Soluzioni.

a) $\ln(2ex - x^2) > 2 \Rightarrow \ln(2ex - x^2) > \ln e^2 \Rightarrow 2ex - x^2 > e^2 \Rightarrow x^2 - 2ex + e^2 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-e)^2 < 0 \;\Rightarrow S = \varnothing$.

b) $\ln\ln(x+1) > 0 \;\Rightarrow \ln(x+1) > 1 \Rightarrow x+1 > e \Rightarrow x > e-1$.

c) Poiché $\ln e^x = x$, si ha:

$$\sqrt{\ln e^x} > 2 \Rightarrow \sqrt{x} > 2 \Rightarrow x > 4.$$

d) Deve essere $0 < x \leq 1$.

Per $0 < x < 1$: $\log x < 0$ e $\sqrt{1-x} > 0$: disequazione impossibile.

Per $x = 1$: $\log x = 0$ e $\sqrt{1-x} = 0$: soluzione $x = 1$.