SOLUZIONE SECONDA PROVA DI MATEMATICA
(risolta in parte utilizzando il software matematico MAPLE 16)

PROBLEMA 1

Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

1. individua l'espressione analitica delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.
2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che:

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$$

Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Risposta 1
Definizione funzione f(x)

valore massimo di x in un mese (commerciale) = 60*24*30 = 43200

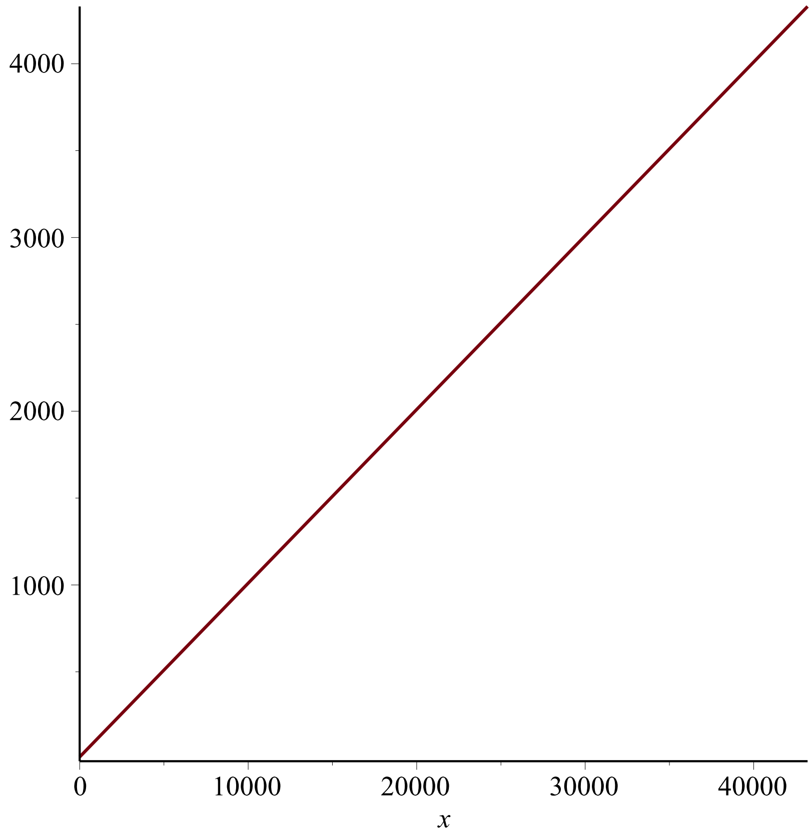
$f(x) := 10 + \frac{x}{10}$ (valuta in euro la spesa totale mensile con $0 \le x \le 43200$)

La spesa mensile f(x) è compresa tra € 10 e € 4330

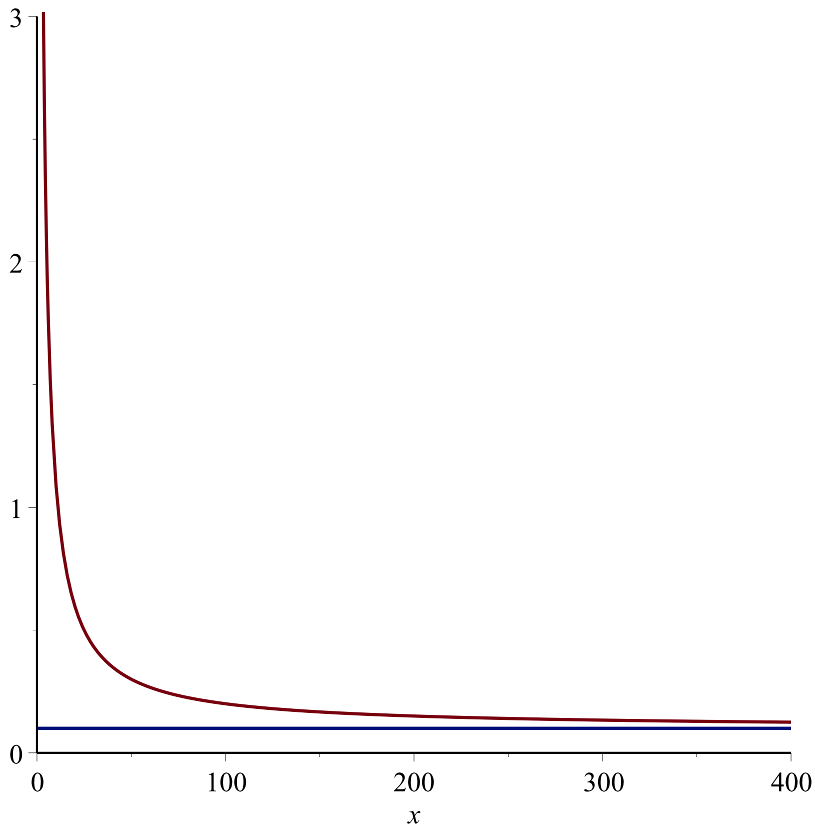
Definizione della funzione g(x)

$g(x) := \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{10} + \frac{10}{x}$ (valuta in euro il costo medio al minuto con $0 < x \le 43200$)

$with(plots) :$
$plot\left(10 + \frac{x}{10}, x = 0 ..43200\right)$



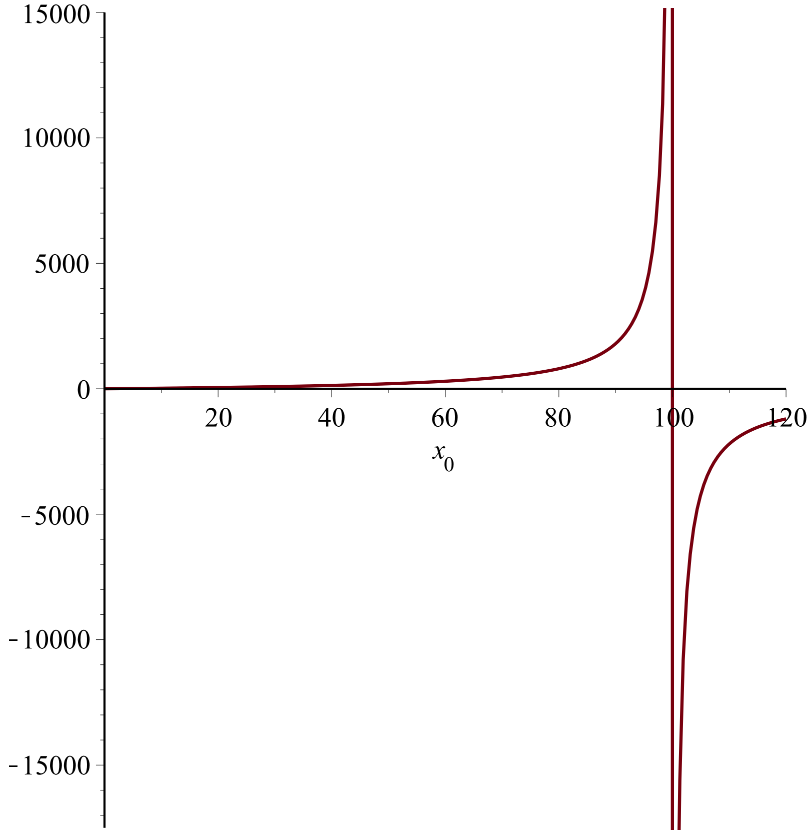
$$plot\left(\left[\frac{1}{10}+\frac{10}{x},\ \frac{1}{10}\right], x=0..400\right)$$



Risposta 2

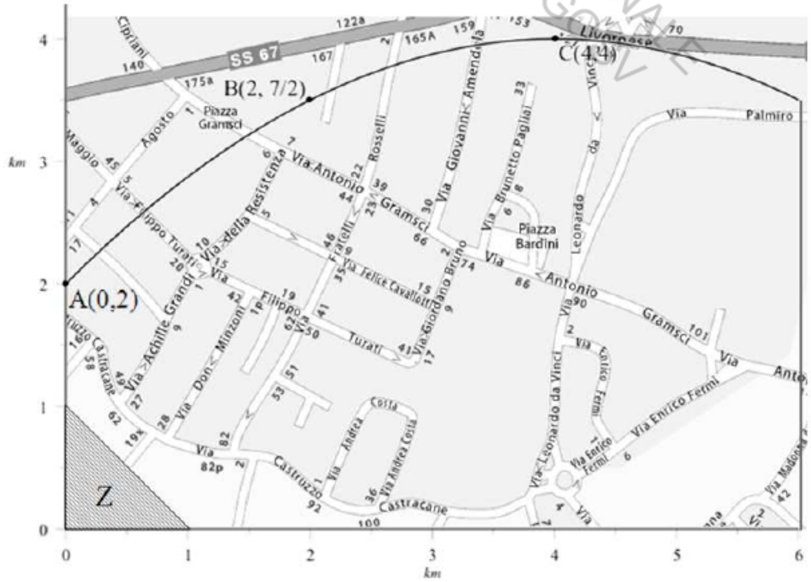
$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} = \frac{5}{x_0} + \frac{1}{20} \quad \rightarrow \frac{10}{x_1} + \frac{1}{10} = \frac{5}{x_0} + \frac{1}{20} \quad \rightarrow x_1 = \frac{200 \cdot x_0}{100 - x_0}$$

$$plot\left(\frac{200 \cdot x_0}{100 - x_0}, x_0 = 0 \,..120\right)$$



L'asintoto verticale x= 100 minuti indica la soglia entro la quale x_1 ha senso nel problema reale e poi diventa negativa
Questo vuol dire che il costro medio non può essere dimezzato oltre i 100 minuti.

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:



La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi x e y, e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "*nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio*"; verifica se effettivamente è così.

L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

Risposta 3

L' equazione della parabola di equazione $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ si ricava imponendo il passaggio per A , B e C.

da A si ricava che c = 2

da B si ricava $\frac{7}{2} = 4\,a + 2\,b + c$

da C si ricava $4 = 16\,a + 4\,b + c$

Le soluzioni sono $a = -\frac{1}{8}$ $\quad b = 1 \quad c = 2$ da cui la parabola $y = -\frac{1}{8} \cdot x^2 + x + 2$

La zona coperta dal segnale sarà $\int_0^6 -\frac{1}{8}x^2 + x + 2 \, dx$ - $AREA\ zona\ Z = 21 - 0,5 = 20,5\ km^2$

Il rapporto tra la zona coperta da segnale e la zona rappresentata dalla mappa sarà $evalf\left(\frac{20.5}{21}\right)$

$$0.9761904762 \tag{1}$$

Quindi la copertura è almeno del 97% per cui **non è corretta** l'affermazione dell'operatore.(96%)

Risposta 4

Oltre i 500 minuti il presso è maggiorato di 10 centesimi al minuto

Quindi $f(x) = 0,1\,x + 10 + 0,1\,(x - 500) = 0,2\,x - 40 = -40 + \frac{1}{5}x \qquad per\, x > 500$

Con la modifica del tariffario le funzioni f(x) e g(x) risultano essere :

$$f(x) = \begin{cases} 10 + \frac{x}{10} & se \quad x \leq 500 \\ -40 + \frac{x}{5} & se \quad x > 500 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{1}{10} & se \quad x \leq 500 \\ \frac{-40}{x} + \frac{1}{5} & se \quad x > 500 \end{cases}$$

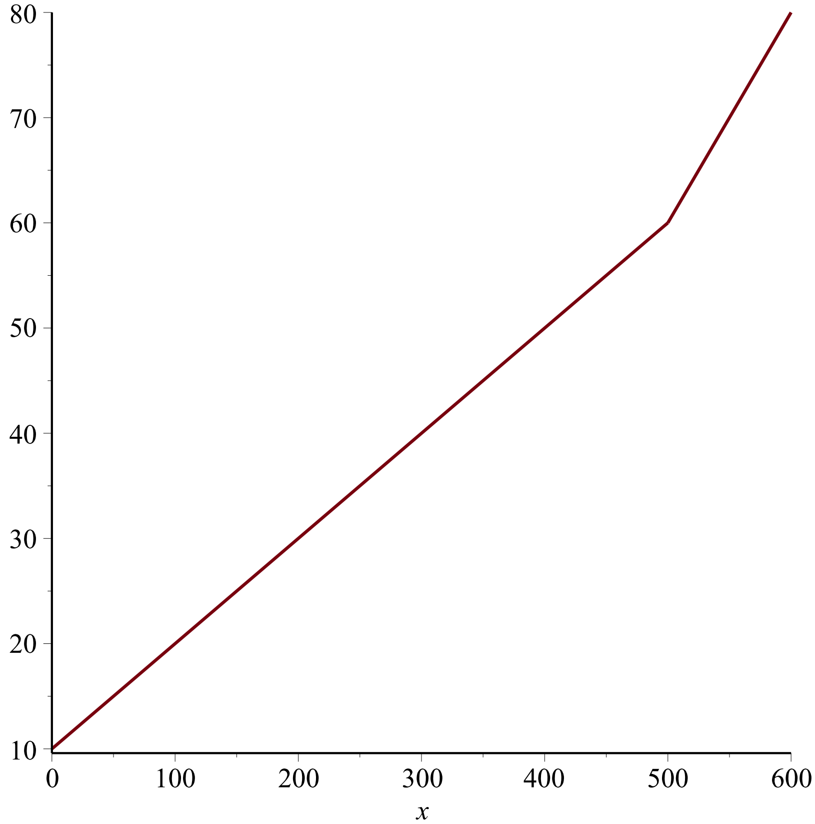
$a(x) = plot\left(10 + \frac{x}{10}, x = 0..500\right)$

$$PLOT(\ldots) = PLOT(\ldots) \tag{2}$$

$b(x) = plot\left(-40 + \frac{x}{5}, x = 500..600\right)$

$$PLOT(\ldots) = PLOT(\ldots) \tag{3}$$

$display([a(x), b(x)])$



la funzione f(x) risulta ora continua ma NON derivabile nel punto x=500

$with(plots):$

$a1 := plot\left(\frac{10}{x} + \frac{1}{10}, x = 450..500\right)$

$$PLOT(...) \tag{4}$$

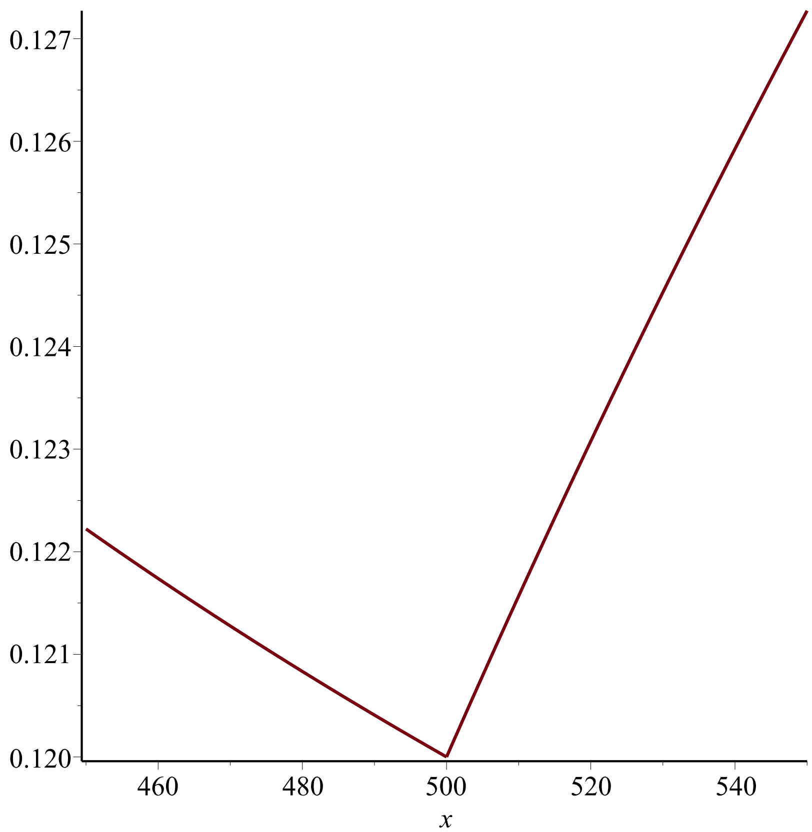
$b1 := plot\left(-\frac{40}{x} + \frac{1}{5}, x = 500..550\right)$

$$PLOT(...) \tag{5}$$

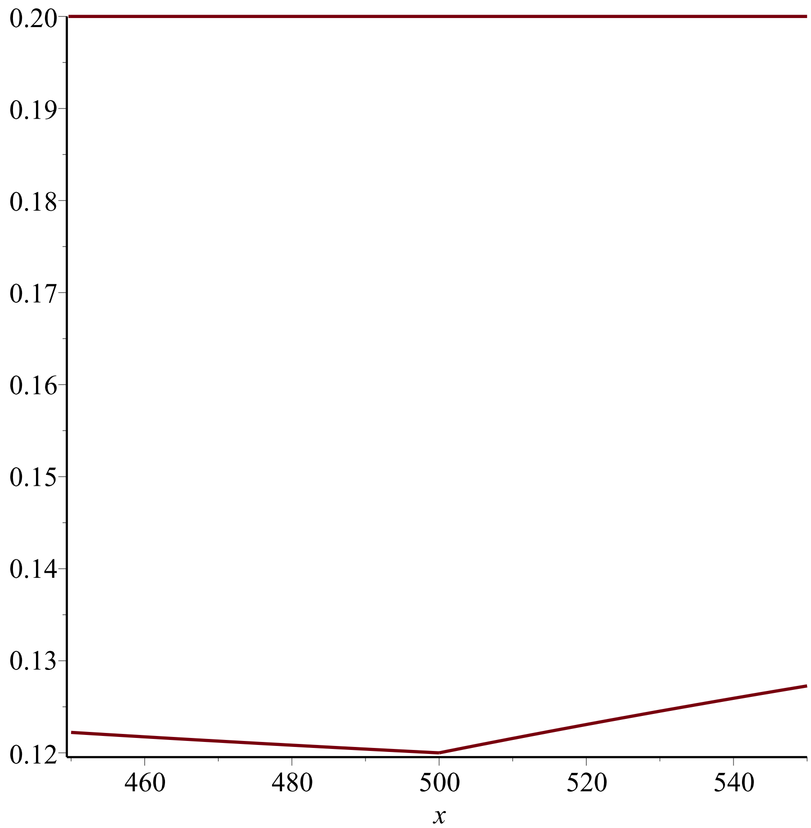
$c := implicitplot\left(y = \frac{1}{5}, x = 0..550, y = 0..0.3\right)$

$$PLOT(...) \tag{6}$$

$display([a1, b1])$



$display([a1, b1, c])$



La funzione g(x) è continua ma non derivabile in x=500 che è anche il suo minimo assoluto .Non ha massimi relativi ma è asintotica alla retta $y = \frac{1}{5} = 0, 2$

<u>spiegazione significato situazione concreta</u>

Per x<500 g(x) decresce : più chiami e più il costo medio mensile diminuisce
Per x>500 g(x) aumenta : più chiami e più il costo medio mensile aumenta fino ad un massimo di 0,2 che è il valore asintotico.

<u>Studio di g'(x)</u>

$$diff\left(\frac{10}{x} + \frac{1}{10}, x\right)$$

$$-\frac{10}{x^2} \tag{7}$$

$$diff\left(-\frac{40}{x} + \frac{1}{5}, x\right)$$

$$\frac{40}{x^2} \tag{8}$$

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{10}{x^2} & x \leq 500 \\ \dfrac{40}{x^2} & x > 500 \end{cases}$$

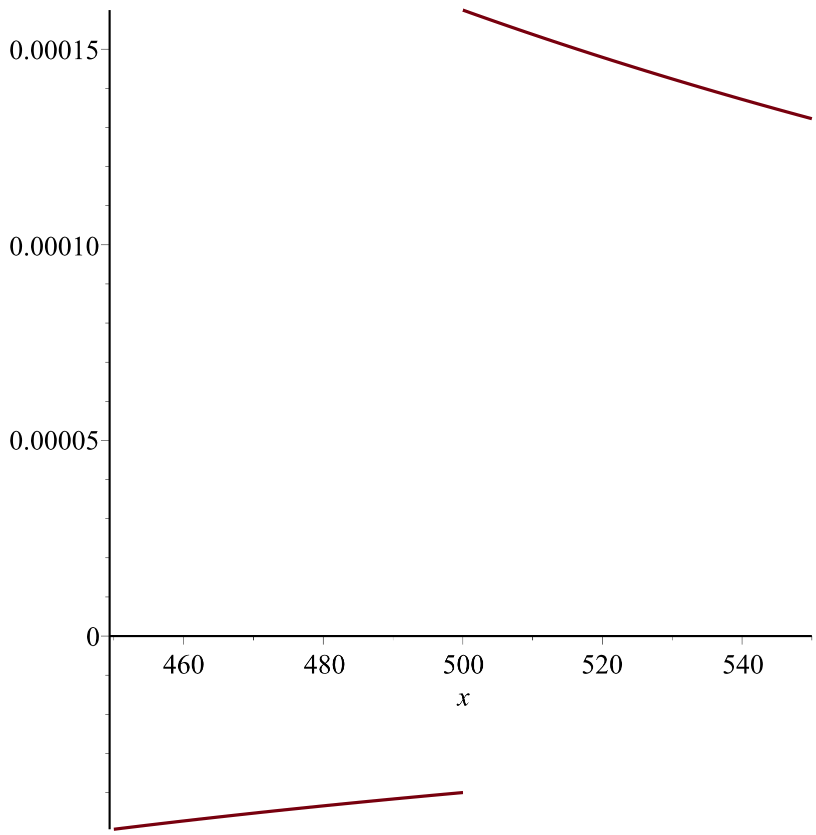
$$g1 := plot\left(-\frac{10}{x^2}, x = 450..500\right)$$

$$PLOT(...) \tag{9}$$

$$g2 := plot\left(\frac{40}{x^2}, x = 500..550\right)$$

$$PLOT(...) \tag{10}$$

$display([g1, g2])$



La derivata prima g'(x) è discontinua in x=500

$$g_1'(x)\Big|_{x=500} = -\frac{1}{25000} \qquad g_2'(x) = \lim_{x \to 500+} \frac{40}{x^2} = \frac{1}{6250}$$