SOLUZIONE SECONDA PROVA DI MATEMATICA
(risolta in parte utilizzando il software matematico MAPLE 16)

PROBLEMA 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura 2. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

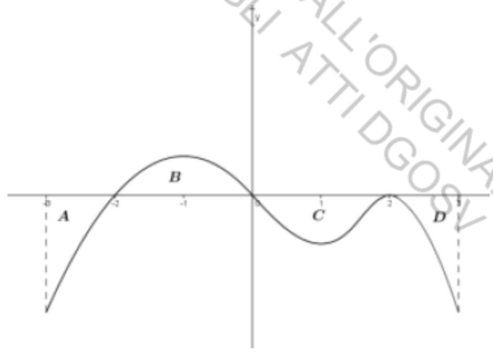


Figura 2

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

Il polinomio di grado minimo deve avere uno zero in x=-2 , uno zero in x=0 e uno zero in x=2
Poiché il polinomio è tangente in x=2 lo zero deve essere contato due volte

Quindi il polinomio è almeno della forma $P(x) = k \cdot x \cdot (x+2) \cdot (x-2)^4$ (polinomio di 4° grado)

2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.

Dire che g(x) è una primitiva di f(x) significa g'(x) = f(x) (definizione di primitiva)

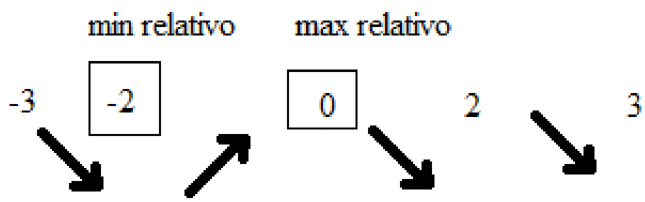
Il grafico di f(x) è dunque il grafico della derivata prima di g(x). Andiamo a leggerlo

$g'(x) > 0$ in $-2 < x < 0$

$g'(x) < 0$ in $-3 < x < -2$, $0 < x < 2$, $2 < x < 3$

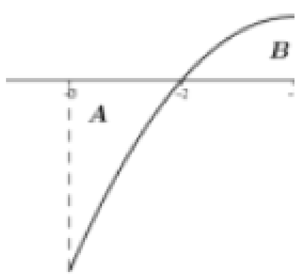
$g'(x) = 0$ in $x=-2$, $x= 0$ e $x=2$

Dal diagramma

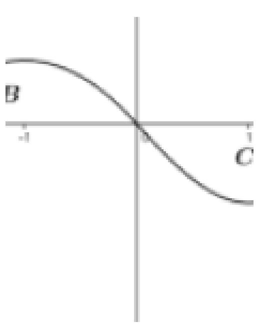


ricaviamo i valori del massimo e del minimo relativo.

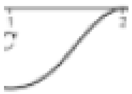
Per lo studio della concavità occorre conoscere la derivata seconda $g''(x) = f'(x)$
Guardiamo nuovamente il grafico di $f(x)$ ma pensiamo al coefficiente angolare delle rette tangenti (che rappresenta f' ossia g'' in un dato punto)



in questo intervallo la funzione è crescente per cui $f'(x) > 0$ .Allora $g''(x) > 0$ (concavità di $g(x)$ verso l'alto per $-3 < x < -1$)



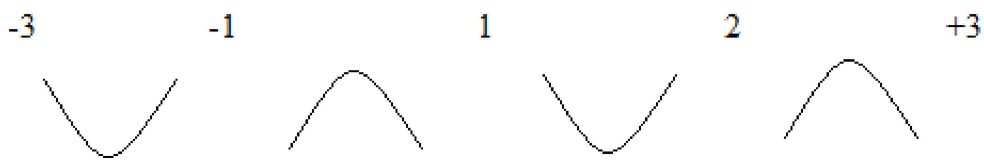
In questo intervallo la funzione è decrescente per cui $f'(x) < 0$. La concavità di $g(x)$ è verso il basso per $-1 < x < 1$



Intervallo con funzione crescente per cui $g''(x) > 0$. Concavità di g(x)verso l'alto per $-1<x<2$

Intervallo con funzione decrescente . Concavità di g(x) verso il basso per $2 < x < 3$

Diagramma riassuntivo



3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x\to 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.

Calcolo g(0)

Ricordiamo che g(x) è una primitiva per cui $AREA(tra\ \ x=a\ e\ x=b) = |g(b)-g(a)|$

Inoltre $g(b)-g(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

Da quanto premesso segue

AREA C (area negativa) $= -\int_0^2 f(x)\,dx = \int_2^0 f(x)\,dx = g(0)-g(2) = 3$

AREA D (area negativa) = -

$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_3^2 f(x)\,dx = g(2)-g(3) = 1 \ \rightarrow\ da\ cui\ segue\ \ (sapendo\ che\ \ g(3) = -5)\ \ \ g(2) = g(3)$
$+1 = -4$

$g(0) = g(2) + 3 = -4+3 = -1$

Calcolo il limite

per x=0 tale limite è chiaramente una forma indeterminata del tipo 0/0

Valgono le ipotesi di applicazione del teorema di De l' Hopital per cui

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{2} = \frac{g'(0)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x+1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

Ponendo $2x + 1 = t$ segue $2\,dx = dt$ e quando $x = -2$ $t = -3$
quando $x = 1$ $t = 3$

Ricordando il legame tra l'integrale e il valore delle aree ed effettuando la sostituzione avremo :

$$\int_{-2}^{1} h(x)\,dx = 3\int_{-2}^{1} f(2x+1)dx = \frac{3}{2}\int_{-3}^{3} f(t)dt = \frac{3}{2}\,(-\,area\,A + area\,B - area\,C - area\,D\,) = \frac{3}{2}(-2+3-3-1) = -\frac{9}{2}$$