I 10 QUESITI
(Risposte svolte in parte utilizzando il software matematico MAPLE 16)

QUESTIONARIO

1. Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.

Risposta. Esiste nelsecondo quadrante un punto x_0 tale che $f'(x_0) = -2$

Quindi $-2 \cdot x_0^2 + 6 = -2 \;\rightarrow\; x_0^2 = 4 \;\rightarrow\; x_0 = \pm 2$ Per noi il valore sarà $x_0 = -2$

La funzione y= f(x) passa dunque per il punto A(-2 , 9)

Inoltre da $f'(x) = -2x^2 + 6$ *ricaviamo* $f(x) = \int (-2x^2 + 6)\, dx + c = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + c$

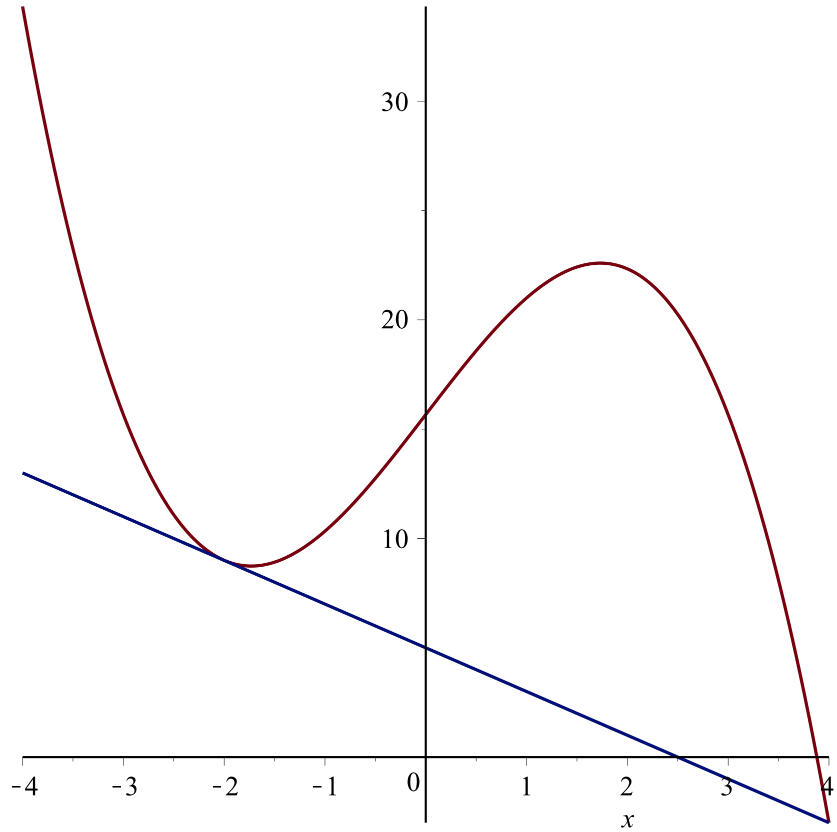
Imponendo il passaggio per A otteniamo $9 = -\frac{2}{3}(-2)^3 + 6(-2) + c \;\rightarrow\; c = \frac{47}{3}$

La funzione cercata è $y = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3}$

GRAFICO (non richiesto nel quesito)

$with(plots):$

$plot\left(\left[-\frac{2}{3} \cdot x^3 + 6 \cdot x + \frac{47}{3}, -2 \cdot x + 5\right], x = -4..4\right)$

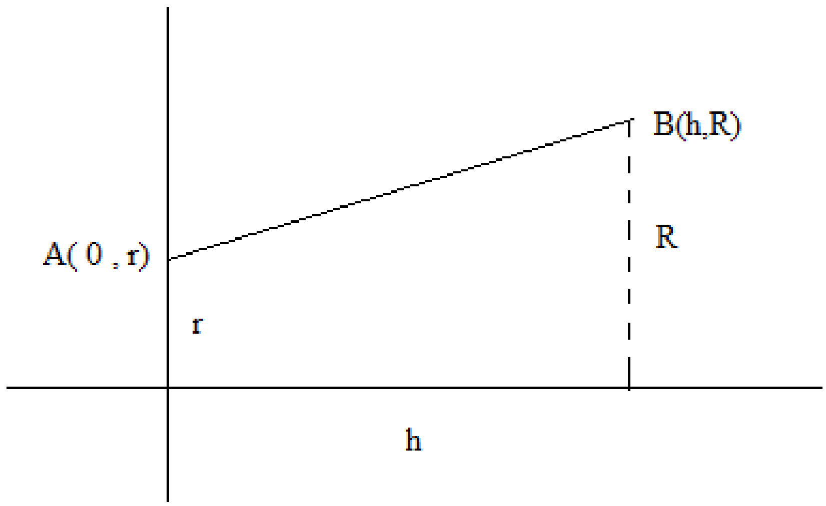


2. Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove R ed r sono i raggi e h l'altezza.

Risposta (usando la formula integrale per il calcolo del volume di solidi di rotazione)



Il tronco di cono è pensabile come solido ottenuto ruotendo di 360° il segmento A B intorno all'asse x.

La retta per AB ha equazione $y = \frac{R - r}{h}x + r$

Il volume del tronco di cono si calcola con la formula

$$V = \pi\int_0^h \left[\frac{R - r}{h}x + r \right]^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^h \left(\left(\frac{R - r}{h} \right)^2 x^2 + r^2 + 2\,\frac{(R - r)x}{h}\,\mathrm{d}x \right.$$

$$V = \pi\int_0^h \left(\frac{R - r}{h} \right)^2 x^2 + r^2 + 2\,\frac{(R - r)x}{h}\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{R^2}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{r^2}{h^2}\,\frac{x^3}{3} - \frac{2\,rR}{h^2}\,\frac{x^3}{3} + r^3 x + \frac{(R - r)x^2}{h} \right]_0^h$$

svolgendo i calcoli si ottiene facilmente la formula.

3. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?

Risposta

I <u>casi possibili</u> lanciando sei volte una moneta sono $2^6 = 64$

<u>testa al più 2 volte</u>

Conteggio casi favorevoli non escono teste (escono tutte croci) 1 SOLO CASO

esce una sola testa (5 croci) $= \frac{6!}{5!} = 6$ CASI

escono due teste (4 croci) $= \frac{6!}{2!\,4!} = 15$ CASI

totale casi favorevoli = 1+ 6 + 15 = 22
Probabilità = 22/64

<u>testa almeno 2 volte</u> (2T , 3T , 4T, 5T, 6T)
I casi possibili sono sempre 64

Conteggio casi favorevoli
2T 15 (come sopra)
3T $\frac{6!}{3!\,3!} = 20$
4T $\frac{6!}{2!4!} = 15$
5T $\frac{6!}{1!\,5!} = 6$
6T 1

totale casi favorevoli = 57
Probabilità = 57/64

4. Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{\ln(x)}{x}$ è soluzione?

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$

$$y' + x \cdot y'' = 1$$

$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$$

Risposta

Calcoliamo la derivata prima $diff\left(\frac{\ln(x)}{x}, x\right)$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} \qquad \textbf{(1)}$$

$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x}$ *da cui* $\rightarrow$ $x^2 y' = 1 - xy$ (1) oppure $x\,y' = \frac{1}{x} - y$ (2)

Deriviamo una seconda volta la (1) ottenendo

$2\,x\,y' + x^2 y'' = -y - x\,y' \rightarrow x^2 y'' + xy' + (2\,xy' + y) = 0$ (3)

Moltiplicando la (2) per 2 e inserendo 'espressione ottenuta nella (3) avremo

$$x^2y'' + xy' + \left(\frac{2}{x} - 2y + y\right) = 0 \quad da\ cui \quad x^2y'' + xy' + \frac{2}{x} = y$$

Pertanto la funzione y è soluzione dell' ultima equazione differenziale.

5. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

Risposta
Dalla geometria analitica delo spazio (programma di 4) è noto che se un piano π ha equazione cartesiana A X + B Y + C Z + D=0
il vettore u = A i + B j + C k (dove i , j, k sono i versori lungo gli assi coordinati)
è perpendicolare al piano.
Quindi la retta che cerchiamo è passsante per O(0,0,0) e // ad u (1 ,1, -1)

Le sue equazioni parametriche saranno

x = t
y = t
z = -t

quelle analitiche (retta vista come intersezione di due piani nello spazio)
si ottengono eliminando il parametro t

Ad esempio x- y =0 e y + z=0 sono una coppia di piani che hanno come intersezione la retta cercata.

6. Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$

determinare il minimo di f.

Risposta
Calcolo la derivata prima

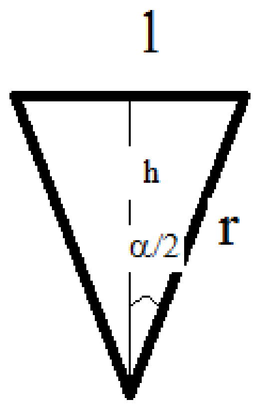
$$f'(x) = 2(x-1) + 2(x-2) + 2(x-3) + 2(x-4) + 2(x-5) = 10x - 30 = 10(x-3)$$

Come si verifica facilmente f' <0 per x<3 e f' >0 per x > 3. Dunque x=3 è punto di minimo
Pertanto il punto di minimo avrà coordinate m(3 , 10)

7. Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r, verificare che $A(n) = \frac{n}{2}r^2 sen\frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$.

Risposta
Un poligono regolare ad n lati è costituito da n triangoli isosceli di base lato del poligono e per lato obliquo il raggio r del

cerchio circoscritto.
Ogni triangolo è del tipo in figura



Area triangolo =

$$\frac{l \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot r \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$$

$$= \frac{r^2 \cdot sen\alpha}{2} \qquad \left(tenendo\ conto\ della\ \ fomula\ di\ \ bisezione\ \ sen\ \alpha = 2\ sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

Area poligono n lati = $\frac{n\, r^2\, sen\,\alpha}{2}$ da cui tenendo presente che $\alpha = \frac{2\,\pi}{n}$ si ottiene la formula richiesta

<u>Calcolo del limite</u>

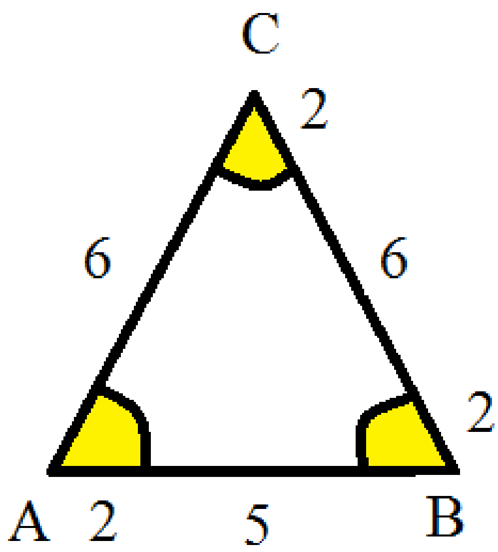
$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot r^2 \cdot sen\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{r^2 \cdot sen\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)}{\frac{2}{n}} = \pi \cdot r^2 \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{sen\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)}{\frac{2\,\pi}{n}}$$

Posto $t = \frac{2\,\pi}{n}$ *abbiamo* $t \to 0$ *quando* $n \to \infty$ per cui il limite non è altro che $\lim_{t \to 0} \frac{sen\ t}{t} = 1$

Il limite vale pertanto $\pi \cdot r^2$ (area del cerchio pensato come poligono ad ∞ lati)

8. I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto *P* all'interno del triangolo, qual è la probabilità che *P* disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?

Risposta



La zona bianca è quella in cui posso tracciare il punto P
Poiché la somma degli angoli interni è 180 risulta che le tre parti gialle unite formano una semicirconferenza di raggio 2

Allora area parti gialle = 2π

area triangolo = $\frac{5}{4}\sqrt{119}$

Probabilità (punto cada in area bianca) = 1 - P(punto cada nelle aree gialle) = $1 - \dfrac{2\pi}{\frac{5}{4}\sqrt{119}}$

9. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

Risposta
Per poter applicare il teorema di Lagrange la funzione deve essere continua in [0, 2] e derivabile in (0, 2)
La continuità sussiste poiché abbiamo

$$f(1) = 1^3 = \lim_{x \to 1+} (x^2 - kx + k) = 1$$

Per la derivabilità dobbiamo avere $f'(1) = 3 \quad per \; x \le 1 \quad e \quad \lim_{x \to 1+} (2x - k) = 3 \quad per \; x > 1$

Questo si realizza con k=-1

Alla funzione $f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$ si applica Lagrange

Cerchiamo ora il valore del punto c (della tesi)

$$\frac{f(2) - f(0)}{2} = 3\,c^2 \quad con \quad 0 < c \le 1$$ questo punto esiste perchè

$$\frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{5 - 0}{2} > 0$$

$$c^2 = \frac{5}{6} \quad \rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{5}{6}} \sim \pm 0,91 \quad \rightarrow \quad c \in (0, 1)$$

$$\frac{f(2) - f(0)}{2} = 2\,c + 1 \quad con \quad 1 \le c < 2$$

Svolgendo le operazioni otteniamo $c = \frac{3}{4}$ *ma* $\frac{3}{4} \notin (1, 2)$ *e quindi è da scartare.*

<u>Grafico (non richiesto)</u>

$f1 := plot(x^3, x = 0\,..1)$

$$PLOT(\ldots) \tag{2}$$

$f2 := plot(x^2 + x - 1\,,\, x = 1\,..2)$

$$PLOT(\ldots) \tag{3}$$

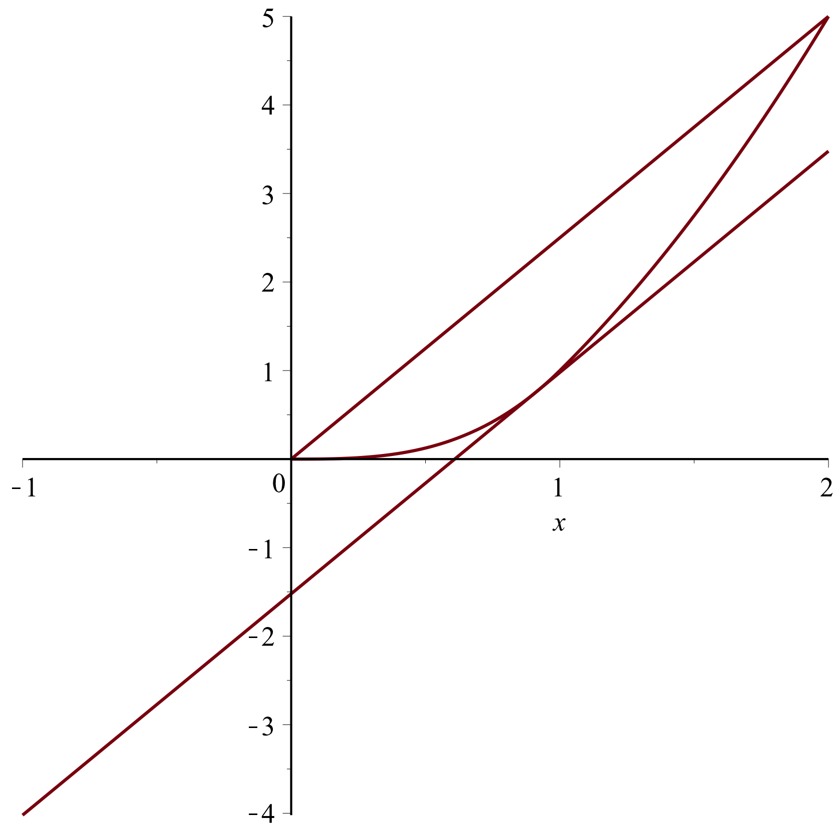
$f3 := plot\left(\frac{5}{2}x\,,\, x = 0\,..2\right)$

$$PLOT(\ldots) \tag{4}$$

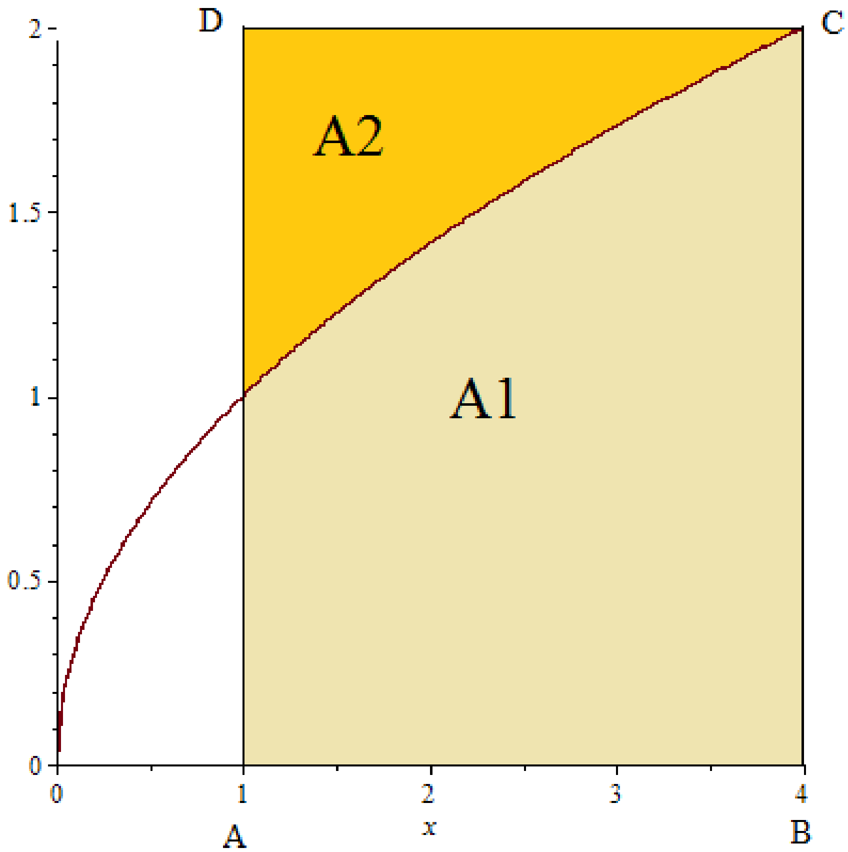
$f4 := plot\left(\frac{5}{2} \cdot x - 1.52145\,,\; x = -1\,..2\right)$

$$PLOT(\ldots) \tag{5}$$

$display([f1, f2, f3, f4])$



10. Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \Re, x \geq 0)$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici $A\,(1, 0)$, $B\,(4, 0)$, $C\,(4, 2)$ e $D\,(1, 2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.



A1 + A2 = 8 (area rettangolo)

$$A1 = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{64} - 1\right) = \frac{14}{3}$$

Quindi avremo **rapporto** $\frac{A2}{A1} = \frac{8 - A1}{A1} = \frac{8}{\frac{14}{3}} - 1 = \frac{24}{14} - 1 = \frac{5}{7}$