DEFINIZIONE

Punto di accumulazione

Si dice che il numero reale x_0 è un punto di accumulazione di A, sottoinsieme di $\mathbb{R}$, se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A.

In generale possiamo dare la seguente **definizione topologica di limite**.

DEFINIZIONE

Sia $y = f(x)$ una funzione con dominio D e sia x_0 un punto di accumulazione di D: si dice che l è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 se per ogni intorno $I(l)$ di l esiste, in corrispondenza, un intorno $I(x_0)$ di x_0 tale che $\forall x \in D \cap I(x_0)$, escluso al più x_0, si ha $f(x) \in I(l)$.

DEFINIZIONE

Limite finito per x che tende a x_0

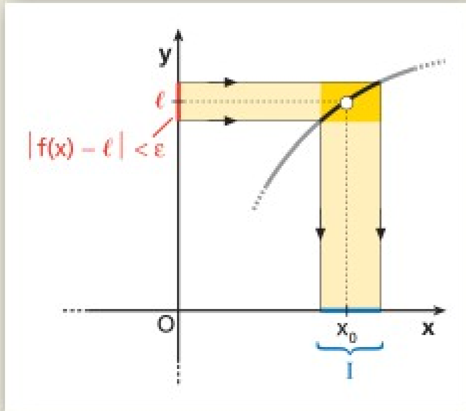
Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale l per x che tende a x_0, e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l,$$

quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε, si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

per ogni x appartenente a I, diverso (al più) da x_0.



In simboli la definizione si può formulare così:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0) \,|\, |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0.$$

DEFINIZIONE

Limite $+\infty$ per x che tende a x_0

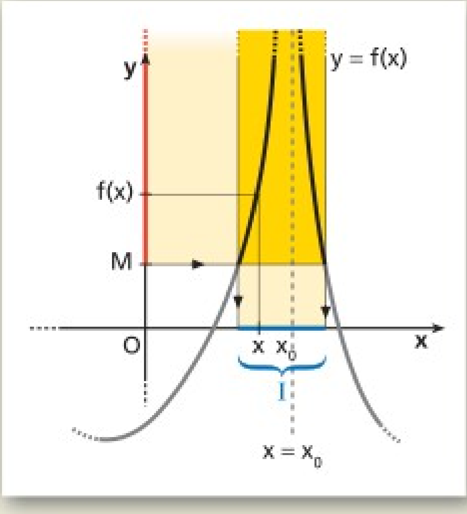
Sia $f(x)$ una funzione non definita in x_0.
Si dice che $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a x_0 e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti

$$f(x) > M$$

per ogni x appartenente a I e diverso da x_0.



Sinteticamente possiamo dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se:

$$\forall M > 0 \quad \exists I(x_0) \,|\, f(x) > M, \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}.$$

DEFINIZIONE

Limite $-\infty$ per x che tende a x_0

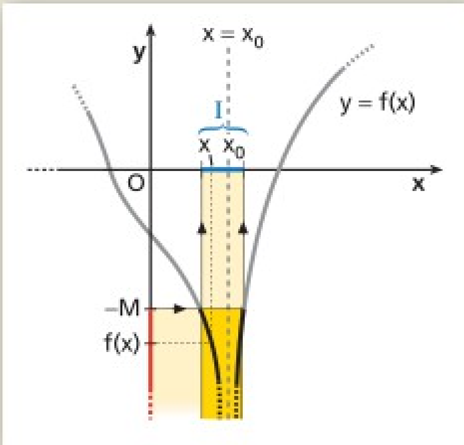
Sia $f(x)$ una funzione non definita in x_0. Si dice che $f(x)$ tende a $-\infty$ per x che tende a x_0 e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti:

$$f(x) < -M$$

per ogni x appartenente a I e diverso da x_0.



In simboli, diciamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se:

$$\forall M > 0 \; \exists I(x_0) \,|\, f(x) < -M, \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}.$$

DEFINIZIONE

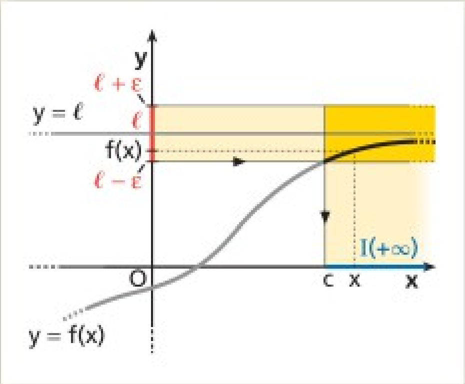
Limite finito di una funzione per x che tende a $+\infty$

Si dice che una funzione $f(x)$ tende al numero reale l per x che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε, si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in I.$$



Considerato che un intorno di $+\infty$ è costituito da tutti gli x maggiori di un numero c, possiamo dire che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c > 0 \,|\, |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x > c.$$

DEFINIZIONE

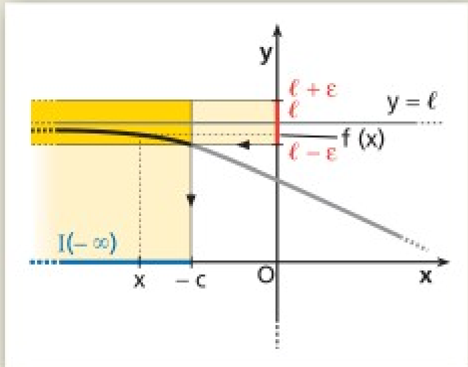
Limite finito di una funzione per x che tende a $-\infty$

Si dice che una funzione $f(x)$ ha limite reale l per x che tende a $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ fissato è possibile trovare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in I.$$



In simboli, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c > 0 \,|\, |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x < -c.$$

DEFINIZIONE

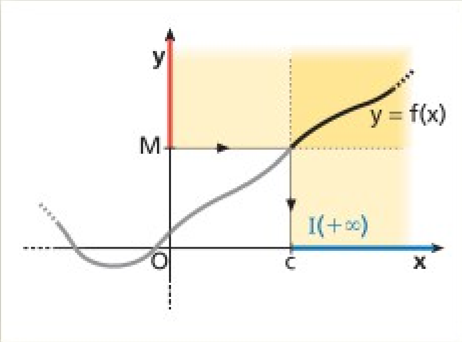
Limite $+\infty$ di una funzione per x che tende a $+\infty$

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che risulti:

$f(x) > M$ per ogni $x \in I$.



In simboli, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se:

$$\forall M > 0 \quad \exists c > 0 \,|\, f(x) > M, \forall x > c.$$

DEFINIZIONE

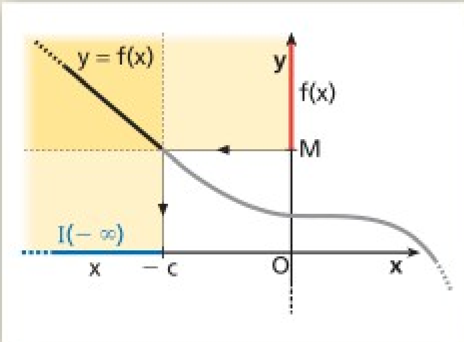
Limite $+\infty$ di una funzione per x che tende a $-\infty$

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x che tende a $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti:

$f(x) > M$ per ogni $x \in I$.



In simboli, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se:

$$\forall M > 0 \quad \exists c > 0 \,|\, f(x) > M, \forall x < -c.$$

DEFINIZIONE

Limite $-\infty$ di una funzione per x che tende a $+\infty$

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per x che tende a $+\infty$ e si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che risulti $f(x) < -M$ per ogni $x \in I$.

In simboli, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se:

$$\forall M > 0 \quad \exists c > 0 \,|\, f(x) < -M, \forall x > c.$$

DEFINIZIONE

Limite $-\infty$ di una funzione per x che tende a $-\infty$

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per x che tende a $-\infty$ e si scrive $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti $f(x) < -M$ per ogni $x \in I$.

In simboli, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se:

$$\forall M > 0 \quad \exists c > 0 \mid f(x) < -M, \forall x < -c.$$