La formula di Taylor

Dato il polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ calcoliamo le sue derivate successive

$$y'=2\mathrm{ax}+b$$

$$y''=2\mathrm{a}$$

$$y'''=y^{IV}=y^{V}=....=0$$

Consideriamo due punti vicini A= $\left(x_0, P(x_0)\right)$ e B= $\left(x_0+h, P(x_0+h)\right)$
e studiamo la dipendenza di B da A.

In A il polinomio e le sue derivate (non nulle identicamente) hanno i seguenti valori :

$$P(x_0)=a \quad x_0^2+b \quad x_0+c$$

$$P'(x_0)=2\mathrm{a} \quad x_0+b \qquad (1)$$

$$P''(x_0)=2\mathrm{a}$$

In B sviluppiamo $P(x_0+h)$

$$\begin{aligned} P(x_0+h) &= a\ x_0^2+2\mathrm{a}\ x_0 h+a\ h^2+b x_0+b\ h+c \\ &= \left(a\ x_0^2+b x_0+c\right)+\left(2\mathrm{a}\ x_0+b\right)h+a\ h^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

per confronto dei coefficienti della (2) con la (1) possiamo riscrivere la (2) nella forma :

$$P(x_0+h)=P(x_0)+P'(x_0)h+\frac{P''(x_0)}{2}\ h^2$$

Se ripetiamo il medesimo procedimento per un generico polinomio di 3° e 4° grado ([1])
troviamo rispettivamente

$$P(x_0+h)=P(x_0)+P'(x_0)h+\frac{P''(x_0)}{2}\ h^2+\frac{P'''(x_0)}{6}h^3 \quad \text{(3a) polinomio di terzo grado}$$

$$P(x_0+h)=P(x_0)+P'(x_0)h+\frac{P''(x_0)}{2}\ h^2+\frac{P'''(x_0)}{6}h^3+\frac{P^{IV}(x_0)}{24}h^4 \quad \text{(3b) polinomio di 4° grado}$$

I numeri che compaiono a denominatore non sono altro che la successione dei fattoriali

---

1 Ricordiamo i prodotti notevoli

$$(a+b)^3=a^3+3\mathrm{a}^2 b+3\mathrm{ab}^2+b^3;(a+b)^4=a^4+4\mathrm{a}^3 b+6\mathrm{a}^2 b^2+4\mathrm{ab}^3+b^4$$

0! = 1   1!=1   2!=2   3! = 6   4!=24   5! = 120   …... n! = n (n-1) ! …....
In generale un polinomio di grado n ha al più n derivate non nulle identicamente e le formule (3) si generalizzano nella seguente :

$$P(x_0+h)=P(x_0)+P'(x_0)h+\frac{P''(x_0)}{2}\ h^2+\frac{P'''(x_0)}{6}h^3+\frac{P^{IV}(x_0)}{24}h^4+.....+\frac{P^n(x_0)}{n!}\ \ h^n \quad (4)$$

La (4) è conosciuta come **sviluppo nel polinomio di Taylor in un intorno del punto** x_0

Nel caso di una funzione generica y=f(x) si dimostra che la (4) vale ancora ma non può essere esatta ; dopo il polinomio di Taylor ci sarà sempre un resto che diventerà sempre più piccolo all'aumentare del grado n.

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}\ h^2+\frac{f'''(x_0)}{6}h^3+.....+\frac{f^n(x_0)}{n!}\ \ h^n+Resto(x_0;n) \\ &= TAYLOR(f,x_{0,}n)\ +\ \ Resto(x_0;n) \end{aligned}$$

$$con \qquad \lim_{n\to\infty} Resto(x_0;n)=0$$

Per poter tracciare il grafico della funzione e del polinomio di Taylor approssimante nell'intorno del punto x_0 si deve scrivere h nella forma $x-x_0$

$$TAYLOR(f,x_{0,}n)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}\ (x-x_0)^2+.....+\frac{f^n(x_0)}{n!}\ \ (x-x_0)^n$$

Esempi

Scrivere lo sviluppo di Taylor del polinomio $y=2\mathrm{x}^3+5\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+6$ **nell'intorno del punto** $x_0=1$

Iniziamo con il calcolo delle derivate
$y'=6\mathrm{x}^2+10\mathrm{x}-3 \qquad y''=12\mathrm{x}+10 \qquad y'''=12$

Ora determiniamo il valore della funzione e delle sue tre derivate nel punto di ascissa 1

$y(1)=10 \qquad y'(1)=13 \qquad y''=22 \qquad y'''=12$

Componiamo il polinomio di Taylor

$$y(1+h)=10+13h+\frac{22}{2!}h^2+\frac{12}{3!}h^3 \quad = \quad 10+13(x-1)+11(x-1)^2+2(x-1)^3$$

Scrivere il polinomio di 6° grado della funzione y = sen x in x=0

Iniziamo con il calcolare le prime sei derivate e valutarle in x=0

derivata	Valore della derivata in $x_0=0$
y'=cosx	y'(0)=cos 0 = 1
y''= - senx	y''(0)= - sen 0 =0
y'''= - cosx	y'''(0)= - cos 0=-1
y^{IV}= sen x	y^{IV}(0)= sen 0=0
y^{V} = cos x	y^{V}(0) = cos 0=1
y^{VI}= -senx	y^{VI}(0)= -sen 0=0

$$sen\, h = h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} + Resto$$

Scrivere il polinomio di 6° grado della funzione y = cos x in x=0

Iniziamo con il calcolare le prime sei derivate e valutarle in x=0

derivata	Valore della derivata in $x_0=0$
y'= - sen x	y'(0)= sen 0 = 0
y''= - cos x	y''(0)= - cos 0 =1
y'''= sen x	y'''(0)= sen 0=0
y^{IV}= cos x	y^{IV}(0)= cos 0=1
y^{V} = - sen x	y^{V}(0) = - sen 0=0
y^{VI}= - cos x	y^{VI}(0)= -cos 0=-1

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + Resto$$

Scrivere il polinomio di 6° grado della funzione y = e^x in x=0

Dato che per tale funzione la derivata coincidono con la funzione stessa abbiamo

$$y(x_0) = y'(x_0) = y''(x_0) = \ldots = y^{VI}(x_0) = 1$$

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} + \frac{h^6}{6!} + Resto$$

La formula di Eulero

Eulero pose $h=i\varphi$ nelle formula per e^h e $h=\varphi$ nelle formule del seno e del coseno.

Svolse i calcoli

$$sen\varphi=\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}+Resto$$

$$\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+Resto$$

e trovò ….

$$e^{i\varphi}=1+i\varphi-\frac{\varphi^2}{2!}-\frac{i\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^4}{4!}+\frac{i\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^6}{6!}+....=\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+....\right)+i\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}+....\right)=$$

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\,sen\varphi$$

Ponendo $\varphi=\pi$, Eulero ottenne quella che è considerata la più bella formula di matematica

$$e^{i\pi}=-1$$

La formula $E=mc^2$ di Einstein

Prendiamo in esame la funzione $y(x)=(1+x)^\alpha$ (1)

e le sue derivate prima e seconda

$y'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $y''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-1}$

Nel punto x=0 abbiamo $y(0)=1$ $y'(0)=\alpha$ $y''(0)=\alpha(\alpha-1)$

per cui lo sviluppo in serie di Taylor , nell'intorno del punto zero sarà :

$$(1+(0+h))^\alpha=1+\alpha h+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)h^2+RESTO \quad (2)$$

Nel giugno del 1905 , dopo aver pubblicato l'articolo che illustrava la teoria della relatività ristretta , Einstein aveva ricavato la formula :

(3) $$E=\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ che esprime l'energia che possiede un corpo a velocità v (c indica la velocità della luce nel vuoto)

La quantità $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ vista come funzione di $\frac{v^2}{c^2}$

è del tipo(1) con $x=-\frac{v^2}{c^2}$ e $\alpha=-\frac{1}{2}$

Nel caso di velocità v molto piccole rispetto a quella della luce c ha senso sviluppare in serie , per cui la (2) diventa

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{-1}{2}}=1+\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-v^2}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-1\right)\left(\frac{-v^2}{c^2}\right)^2+RESTO=$$

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{-1}{2}}=1+\left(\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2+RESTO=$$

Inserendo la relazione trovata nella 3 e tracurando i termini dal 2° grado in avanti , Einstein ottenne

$$E=m_0 c^2+\frac{1}{2}m_0 v^2 \quad (4)$$

Interpretando il termine $\frac{1}{2}m_0 v^2$ come energia cinetica la (4) afferma che

ogni corpo possiede energia anche quando la velocità è nulla

tale energia è proporzionale alla massa a riposo m_0 del corpo.