FORMATIVA PER VERIFICA SU TEORIA 31 MARZO (MODULO 5)

1)Risolvere i seguenti limiti utilizzando De l'Hopital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2\ln x}{1+\ln x}= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} -2 = -2$$

$\lim_{x\to0}\frac{x-tg\,x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{cos^2 x}}{3x^2}$ è *ancora forma indeterminata . Derivo ancora*

$$\lim_{x\to0}\frac{-(-2)cos^2x(-sen\,x)}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{-1\frac{sen\,x}{cos^{-3}x}}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{3}\,\frac{sen\,x}{x}\,\frac{1}{cos^3x}= -\frac{1}{3}$$

Tenendo conto che quando x -> 0 cos x tende a 1 e che sen x/ x vale 1 (limite fondamentale)

$\lim_{x\to+\infty}(2x-\ln x) = +\infty - \infty$ è *forma indeterminata su cui non* è *applicabile De l'Hopital*

Dobbiamo trasformare il limite in una forma 0/0 o ∞ /∞ .

$$\lim_{x\to+\infty}(2xln\,e-\ln x) = \lim_{x\to+\infty}(ln\,e^{2x}-\ln x) = \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{2x}}{x} = \ln(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x})$$

Ora il limite è della forma ∞ /∞ e possiamo applicare De l'Hopital

$$\ln(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}) = \ln\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}}{1} = \ln(+\infty) = +\infty$$

$\lim_{x\to0} tg\,x * \ln x$ Questo limite è forma indeterminata del tipo 0 * (-∞) . Come prima dobbiamo trasformarlo in una forma in cui sia applicabile il teorema. Ci sono due possibilità :

$$\lim_{x\to0}\frac{tg\,x}{\frac{1}{\ln x}}=\frac{0}{0}\quad oppure \quad \lim_{x\to0}\frac{ln\,x}{\frac{1}{\text{tg}\,x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Partendo dalla prima avremo

$\lim_{X\to0}\frac{tg\,x}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{cos^2x}}{-\frac{1}{x\,ln^2x}}=-\lim_{x\to0}\frac{1}{cos^2x}\;(x\,ln^2x)$ *che* è *indeterminata* $0*\infty$ *nel termine in parentesi*

poiché per x->0 il coseno tende a 1.

Il $\lim_{x\to0} x\,ln^2x$ si trasforma nel limite alla De l'Hopital ∞/∞ $\lim_{x\to0}\frac{ln^2\,x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}\frac{2\frac{1}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}} =$

Una derivazione non basta per togliere l'indeterminazione. Dobbiamo derivare una seconda volta

$\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to0} -2x = 0$. Quindi il limite iniziale vale 1*0 =0

Partendo dalla seconda avremo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}=\frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-tg^{-2}\,x \quad \frac{1}{cos^2\,x}} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x}cos^2 x\; tg^2 x = \lim_{x\to 0} -sen\,x\;\frac{sen\,x}{x} = 1*0=0$$

2) Sia f una funzione derivabile in R con derivata continua ,tale che

Df (2) = 4 . Calcolate

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2-5x)-f(2-3x)}{x}$$

Risposta

Osservazione 1 : posto a= 2- 3x e b= 2-5x segue b-a= 2-5x-2+3x = -2x

Dunque $\dfrac{f(2\text{-}5x) - f(2\text{-}3x)}{X} = -2\ \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Applicando il teorema di Lagrange segue $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ dove a < c < b

Osservazione 2 Quando il limite tende a zero a = b = 2

Di conseguenza dalla diseguaglianza a<c<b segue c=2

Osservazione 3 Il limite che vogliamo calcolare dalle osservazioni precedenti diventa

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2-5x)-f(2-3x)}{x} = -2*\lim_{b\to a} f'(c) = -2*f'(2) = -4$$

3) giustifica perché la funzione f(x) = $x^3 + e^{2x}$ è invertibile e , detta g(y) la sua inversa , calcolare g'(1)

Risposta. Una funzione è invertibile negli intervalli in cui è biunivoca (suriettiva e iniettiva)

La funzione in esame ha dominio da R in R per cui Dom f =R e dunque è **suriettiva**

Le funzioni x^3 e e^{2x} sono due funzioni sempre crescenti (g(b) > g(a) quando b>a)

per cui lo sarà la funzione f(x) essendo la loro somma.

Quindi f(x) **è iniettiva** in quanto è impossibile che f(b)=f(a) per a$\neq$ b

Per calcolare g'(y) applichiamo il teorema della derivata della funzione inversa

$g'(y_0) = 1 / f'(x_0)$ valutata nel punto $y_0 = f(x_0)$

Calcoliamo la derivata di $f(x)$: $f'(x) = 3x^2 + 2e^{2x}$

Il punto $y_0 = 1$ corrisponde a $x_0 = 0$

Siamo ora in grado di calcolare $g'(1)$

$$g'(1) = 1 / f'(0) = 1/2$$

4) Enunciare ipotesi e tesi del teorema di Cauchy

(vedere libro di testo)

5) Illustrare il significato geometrico del teorema di Lagrange

(vedere libro di testo)

6) Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual `e la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

Risposta . Sappiamo dalla trigonometria che l'area di un triangolo è il semiprodotto di due suoi lati per il seno dell'angolo fra essi compreso. Allora

2*3 * seno (angolo) = 6 ------------> seno(angolo)=1 --> angolo=90°

Il terzo lato sarà dunque l'ipotenusa che misurerà $\sqrt{13}$

7) Se la funzione f(x) − f(2x) ha derivata 5 in x = 1 e derivata 7 in x = 2, qual `e la derivata di f(x) − f(4x) in x = 1?

Risposta

Definiamo due funzioni $F(x) = f(x) - f(2x)$ e $G(x) = f(x) - f(4x)$

Le due funzioni $f(2x)$ e $f(4x)$ sono esempi della più generale funzioni $f(nx)$ con n numero naturale.

1° osservazione : $f(nx)$ è una funzione composta $x \dashrightarrow nx$

$t \dashrightarrow f(nx)$

pertanto la sua derivata (derivata di una funzione composta) avrà la seguente espressione :

$$n * f'(t)\,|_{t=2x}$$

2° Osservazione Dire che stiamo parlando della funzione $f(x)$ o $f(t)$ è la stessa cosa ; non Abbiamo fatto altro che "cambiare nome" alla variabile indipendente.

Di conseguenza sono da interdersi uguali le scritture $f'(a)\,|_{t=a} = f'(x)\,|_{x=a}$

Fatte queste premesse calcoliamo le derivate di F(x) e G(x) :

$F'(x) = f'(x) - 2 f'(t)_{t=2x}$ $G'(x) = f'(x) - 4 f'(t)_{t=4x}$

Ora per x=1 e x = 2 abbiamo :

$F'(1) = f'(1) - 2 f'(t)_{t=2}$ e $F'(2) = f'(2) - 4 f'(t)_{t=4}$

$G'(1) = f'(1) - 4 f'(t)_{t=4}$

Osservando che $f'(2) = f'(x)_{x=2} = f'(t)|_{t=2}$ segue che

$G'(1) = F'(1) + 2 F'(2) = 5 + 2*7 = 19$

8) In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei suoi personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme N dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: «....se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Quale la risposta (motivata) all'interrogativo posto?

Risposta.

Salviati afferma che;

l'insieme N è l'unione dei numeri che sono quadrati perfetti con i numeri che non lo sono.

Essendo l'insieme dei quadrati un sottoinsieme di N **deve per forza** avere meno elementi

(la parte è minore del tutto nella filosofia aristotelica). <u>Questo è verissimo</u>

Noi oggi diciamo che è falso in quanto (da Cantor in poi) sappiamo che l'avere tanti elementi

quanto un suo sottoinsieme (infinito) è la proprietà caratterizzante degli insiemi infiniti.

Più semplicemente sappiamo che la funzione f : N ---> {quadrati perfetti} ($f : n \dashrightarrow n^2$)

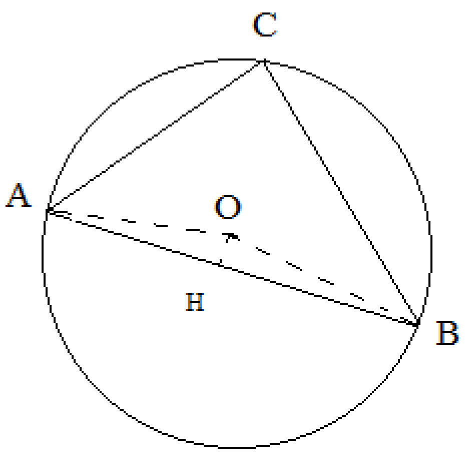
è una funzione biunivoca

9) Una sfera è inscritta in un cubo; quale è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?

Risposta. Il diametro della sfera sarà uguale al lato del cubo per cui :

$$vol(cubo) = L^3 \qquad vol(sfera) = \frac{4}{3}\pi \frac{L^3}{8} = \frac{1}{6}\pi L^3 \qquad \frac{vol(sfera)}{vol(cubo)} = \frac{\pi}{6}$$

10)Si dimostri che in un triangolo, il rapporto tra ciascun lato e il seno dell’angolo ad esso opposto è uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo.



$AO = R$

$\widehat{AOC} = 2\,\widehat{ACB}$

Conseguenza del teorema ;
Angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza che insistono nello stesso arco

Il triangolo AOB è isoscele perché AO = OB = r dove r è il raggio della circonferenza circoscritta.

L’angolo AOH è uguale a ACB perché metà di AOB

Per note proprietà trigonometriche abbiamo : AH = AO * sen AOH e di conseguenza

$$AB = 2 * AH = 2 * r * \text{sen } AOH$$

$$AB / \text{sen } ACB = 2r = \text{diametro cerchio circoscritto}$$