

**ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**SECONDA PROVA SCRITTA - ESEMPIO**

**Indirizzi:** LI02 – SCIENTIFICO

LI15 – SCIENTIFICO – SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

**Tema di:** MATEMATICA

*Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 4 quesiti del questionario.*

**PROBLEMA 1**

Fissati due parametri reali  $S > 0, k > 0$ , considera la funzione:

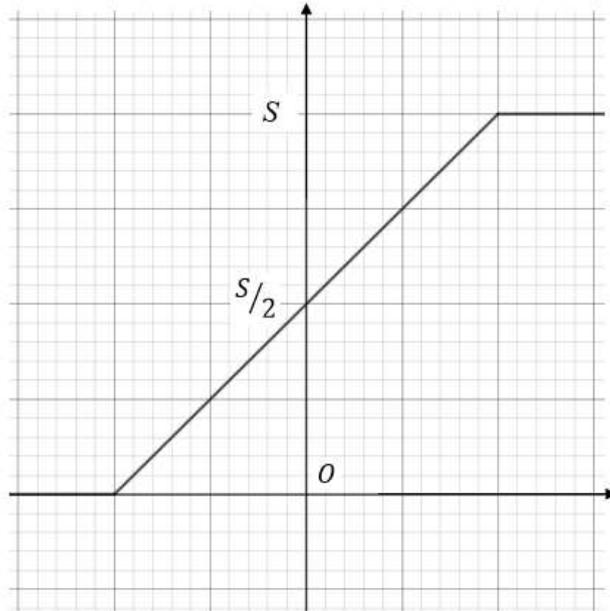
$$f_k(x) = \frac{S}{1 + e^{-kx}}$$

il cui grafico viene indicato con  $\Gamma_k$ .

La funzione  $f_k(x)$  può essere adoperata per studiare la possibile evoluzione nel tempo di una popolazione che abbia capacità di riprodursi, nell'ipotesi in cui la limitatezza delle risorse disponibili causi l'esistenza di una "soglia di sostenibilità" al di sotto della quale la popolazione è costretta a mantenersi.

1. Dimostra che i valori assunti dalla funzione  $f_k(x)$  si mantengono all'interno dell'intervallo aperto delimitato inferiormente dal valore 0 e superiormente dal valore  $S$ , dove quest'ultimo rappresenta tale soglia di sostenibilità.
2. Osservando  $\Gamma_k$ , individua la trasformazione geometrica da applicare a  $\Gamma_k$  per farlo diventare il grafico di una funzione dispari, e determina l'espressione analitica di tale funzione.
3. Individua graficamente o analiticamente il valore della  $x$  corrispondente alla massima velocità di crescita di una popolazione secondo il modello rappresentato dalla funzione  $f_k(x)$ ; determina quindi, in funzione dei parametri  $S$  e  $k$ , il valore di tale velocità massima.

Dovendo effettuare lo studio di una coltura batterica in un ambiente a risorse limitate, puoi pensare, al fine di semplificare i calcoli, di approssimare la funzione  $f_k(x)$  con una funzione come  $g_k(x)$ , il cui grafico è riportato nella figura seguente:



Il valore di  $g_k(x)$  passa da 0 a  $S$  con una rampa lineare, di pendenza pari alla pendenza di  $\Gamma_k$  nel punto di ascissa 0.

4. Determina, in funzione dei parametri  $S$  e  $k$ , l'espressione analitica della funzione  $g_k(x)$ .
5. Illustra il procedimento che adoteresti per valutare la accettabilità dell'approssimazione di  $f_k(x)$  fornita da  $g_k(x)$ .
6. All'aumentare di  $k$ , tale approssimazione diventa migliore? Motiva la tua risposta.

## PROBLEMA 2

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE EXPRESS sito nella tua regione. All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione.

Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di parallelepipedo a base quadrata, di volume  $10 \text{ dm}^3$ , che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi.

Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1. Determina il valore del lato  $b$  della base quadrata che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza  $h$ , tenendo presente la necessità che il volume sia  $10 \text{ dm}^3$ .

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di  $-18^{\circ}\text{C}$ . Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di  $10^{\circ}\text{C}$ ; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente, e inizia a fondere se lungo il percorso raggiunge la temperatura di  $0^{\circ}\text{C}$ .

2. Scegli, motivando la tua scelta, quale delle seguenti funzioni è più idonea per rappresentare il processo di riscaldamento prima dell'inizio della liquefazione ( $T_a$  = temperatura ambiente,  $T_g$  = temperatura del ghiaccio all'istante  $t = 0$ ,  $T(t)$  = temperatura del ghiaccio all'istante  $t$ , dove  $t$  è il tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{-Kt}$$

$$T(t) = (T_a - T_g) \cdot (1 - e^{-Kt}) + T_g$$

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{Kt} - T_a$$

e determina il valore che deve avere il parametro  $K$  perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

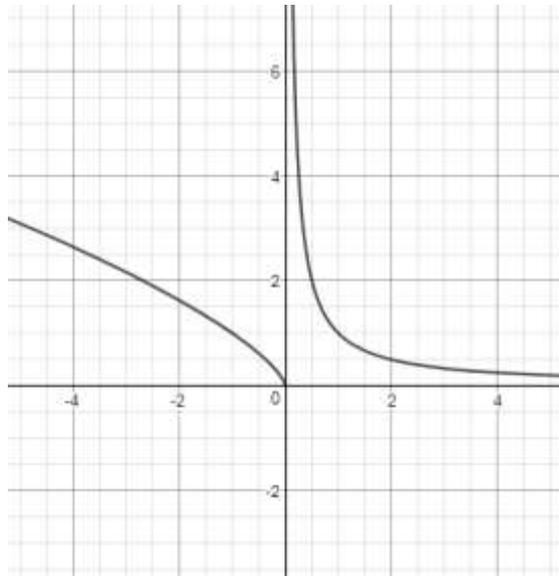
3. Poiché il parametro  $K$  varia in funzione di diversi fattori produttivi, c'è un'incertezza del 10% sul suo effettivo valore. Ritieni che questo determini una incertezza del 10% anche sul valore della temperatura  $T$  del blocco di ghiaccio all'istante in cui raggiunge il camion frigorifero? Motiva la tua risposta, in modo qualitativo o quantitativo.

L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente cilindrico, con raggio della base eguale a 1,5 dm, e altezza eguale a 2 dm.

4. Sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9,05%, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.

## QUESTIONARIO

- 1) In figura è riportato il grafico della funzione  $f'(x)$ , derivata della funzione  $f(x)$ . Il grafico presenta un asintoto verticale per  $x = 0$ . Supponendo che la funzione  $f$  sia definita in  $\mathbb{R}$ , descrivi la derivabilità della funzione nel punto di ascissa nulla e fornisci un grafico probabile della funzione in un intorno di zero.



- 2) Individua il valore di  $k$  per cui la tangente nell'origine al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x}{x - k}$$

forma un angolo di  $\pi/6$  radianti con l'asse delle ascisse.

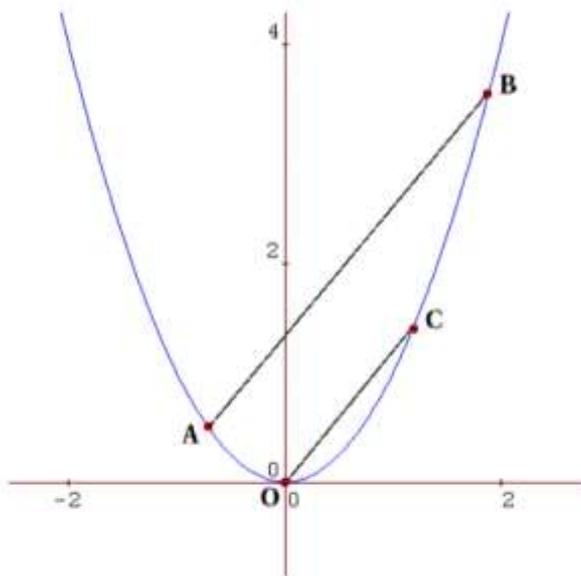
- 3) Risolvi esclusivamente per via grafica la disequazione:

$$|x - 2| > |x - 6|$$

- 4) Il cerchio di raggio  $R$  centrato nel vertice in basso a sinistra del quadrato in figura ne ricopre metà della superficie; il cerchio di raggio  $r$  centrato nel centro del quadrato ne occupa metà della superficie. Sapendo che i quadrati sono equivalenti, determina il rapporto  $R/r$ .



- 5) Presi due punti  $A(a, a^2)$  e  $B(b, b^2)$  sulla parabola  $y = x^2$ , traccia la retta  $OC$ , parallela alla retta  $AB$  e passante per l'origine e per il punto  $C(c, c^2)$ .



Dimostra che  $a + b = c$ .

Traccia un'altra parallela  $DE$ , passante per due punti  $D$  ed  $E$  appartenenti alla parabola, e mostra che i punti medi delle tre parallele giacciono su una retta.

- 6) Il grafico della funzione polinomiale cubica  $y = f(x)$  intercetta l'asse  $x$  nei punti di ascissa 10, 100 e 1000. È sufficiente questa informazione per individuare le coordinate del punto di flesso? Se sì, determinale. Se no, spiega per quale motivo.
- 7) Una sfera, il cui centro è il punto  $K(1, 0, 1)$ , è tangente al piano  $\Pi$  avente equazione  $x - 2y + z + 1 = 0$ . Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?
- 8) Se si lancia una moneta 2 volte, la probabilità di ottenere una testa e una croce (in qualsiasi ordine) è pari al 50%. Se la moneta viene lanciata 4 volte, la probabilità di ottenere due teste e due croci, in qualsiasi ordine, è ancora pari al 50%? Motiva la tua risposta.

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.