Elementi di teoria delle trasformazioni

LA STRUTTURA DI GRUPPO

La struttura di gruppo

Un gruppo è un insieme G in cui è definita una operazione $\circ$ ("leggere tondino")

inoltre $\forall$ a,b $\in$ G allora a $\circ$ b $\in$ G

$\exists$ 1 $\in$ G detto **elemento neutro** tale che $\forall$a$\in$G a$\circ$1 = 1$\circ$a = a

$\forall$ a$\in$ G $\exists$ a^{-1} detto **inverso di a** tale che $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = 1$

$\forall$ a,b,c $\in$ G l'operazione $\circ$ **è associativa** $(a \circ b) \circ c = a \circ \circ (b \circ c)$

Quando l'operazione $\circ$ è commutativa si dice che **G è un gruppo abeliano**

Esempi :

1) L'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali con l'operazione di somma è un gruppo abeliano in quanto :

l'elemento neutro è lo 0

Se $\frac{m}{n}$ è un elemento di $\mathbb{Q}$ il suo inverso sarà la frazione $-\frac{m}{n}$

la somma è un'operazione associativa .

2) L'insieme $\mathbb{Q}$ -{0} con l'operazione di prodotto * è un gruppo abeliano :

1 è il suo elemento neutro

se $\frac{m}{n}$ è un elemento di $\mathbb{Q}$ allora $\frac{n}{m}$ è il suo inverso

il prodotto è poi associativo

3) Il sottoinsieme dei numeri reali della forma $a + b\cdot\sqrt{3}$ (a $\neq$ 0) con l'operazione prodotto è un gruppo:

elemento neutro è $1 + 0\cdot\sqrt{3}$

l'inverso di a + b$\sqrt{3}$ è $\frac{a}{a^2 - 3\cdot b^2} - \frac{b}{a^2 - 3\cdot b^2}\cdot\sqrt{3}$

infatti posto $z = a + b\cdot\sqrt{3}$ l'inverso sarà il numero z^{-1} tale che $z\cdot z^{-1} = 1 + 0\cdot\sqrt{3}$

Per determinare $z^{-1} = x + y\sqrt{3}$ basta eseguire il prodotto con z ed uguagliare ottenendo il sistema

$$\left(a + b\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(x + y\cdot\sqrt{3}\right)$$

$$\left(a + b\sqrt{3}\right)\left(x + y\sqrt{3}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{expand (a+b*sqrt(3))*(x+y*sqrt(3))}}$$

$$a\,x + a\,y\sqrt{3} + b\sqrt{3}\,x + 3\,b\,y \qquad \textbf{(1.2)}$$

$with(SolveTools)$:

$Linear(\{a\cdot x + 3\cdot b\cdot y - 1, a\cdot y + b\cdot x = 0\}, \{x, y\})$;

$$\left\{x = \frac{a}{-3\,b^2 + a^2}, y = -\frac{b}{-3\,b^2 + a^2}\right\} \qquad \textbf{(1.3)}$$

4) L'insieme $\mathbb{Z}_m$ degli interi modulo m (con m numero primo) è un gruppo

rispetto alla somma

0 è l'elemento neutro

si indica con -a l'inverso di a

rispetto al prodotto $\mathbb{Z}_m$ -{0} è un gruppo

1 è l'elemento neutro

si indica con a^{-1} l'inverso di a

ALGEBRA DELLE MATRICI 2X2

Una matrice M è un tabella composta da 4 elementi

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Il generico elemento $a_{i\,j}$ (da leggere l'elemento della riga i-esima e colonna j-esima)

potrà essere un numero reale anche nullo.

La matrice nulla $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e la matrice unità $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sono primi esempi

Ad ogni matrice M è possibile associare un solo numero detto determinante di M e denotato con $det\,M = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Somma di due matrici A e B

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Prodotto di una matrice M per un numero reale k

$$k * \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\,a_{11} & k\,a_{12} \\ k\,a_{21} & ka \end{bmatrix}$$

Prodotto di una matrice M per un vettore v

Prodotto di una matrice M per un vettore v

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot v_x + a_{12} \cdot v_y \\ a_{21} \cdot v_x + a_{22} \cdot v_y \end{bmatrix}$$

Prodotto di due matrici A e B

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Proprietà del prodotto

il prodotto non è commutativo $A \cdot B \neq B \cdot A$

per ogni matrice M con det M≠ 0 esiste la matrice inversa $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{detA} & -\frac{a_{12}}{det\,A} \\ -\frac{a_{21}}{detA} & \frac{a_{11}}{detA} \end{bmatrix}$ tale

che $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I$ dove I è la matrice unità

L'insieme delle matrici con determinante non nullo formano un gruppo

TRASFORMAZIONI AFFINI

Una trasformazione geometrica T(x,y) è una legge matematica che assegna nuove coordinate (x', y') ad un punto a partire da quelle vecchie (x,y)

Se è del tipo $x' = a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + e \qquad y' = a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + f$

con $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ tale che det M≠0 parleremo di ***trasformazione affine*** (o di affinità)

Se det M >0 l'affinità sarà **diretta** perchè conserva l'orientamento

altrimenti sarà **indiretta** e invertirà l'orientamento

I coefficienti e, f vengono interpretati come componenti di un vettore v; precisamente e è la componente orizzontale mentre f quella verticale

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

TRASLAZIONE di vettore v

Equazioni di una traslazione in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

e in forma semplificata $\boldsymbol{x' = x + v_x} \qquad \boldsymbol{y' = y + v_y}$

<u>Una traslazione conserva la distanza tra due punti</u>

TRASFORMAZIONI LINEARI

Le equazioni sono della forma (non vi è traslazione)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Quindi <u>ogni affinità è la composizione di una trasformazione lineare e una traslazione</u>

ISOMETRIE

E' una trasformazione affine che conserva la distanza tra due punti .

Siano $A = (x_A, y_a)$ e $B(x_B, y_B)$ *due generici punti*

Una generica affinità $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$ li trasformerà nei punti

$A' = (x'_{A'}, y'_A)$ e $B' = (x'_B, y'_B)$

Vediamo quali sono le condizioni sui coefficienti della matrice affinché rimanga invariata la distanza : d(A,B) = d(A' , B') (1)

$$x'_A - x'_B = (x_A - x_B) \cdot a + (y_A - y_B) \cdot b$$

$$y'_A - y'_B = (x_A - x_B) \cdot c + (y_A - y_B) \cdot d$$

$$d(A', B') = \sqrt{(x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2}$$
$$= \sqrt{(x_A - x_B)^2 (a^2 + c^2) + (y_A - y_B)^2 (b^2 + d^2) + 2(x_A - x_B)(y_A - y_B)(ab + cd)}$$

La condizione (1) porta alle relazioni $a^2 + c^2 = 1$ $b^2 + d^2 = 1$ $ab + cd = 0$
Allora scelto un angolo α e posto $a = \cos\alpha$ $b = -\,sen\,\alpha$ $c = \cos\alpha$ e $d = sen\,\alpha$ (oppure $a = -\cos\alpha$ $b = sen\,\alpha$ $c = \cos\alpha$ e $d = sen\,\alpha$)
possiamo riscrivere la matrice nella forma

R(α)= $\begin{bmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$ il cui determinante è 1 oppure R'(α)= $\begin{bmatrix} -cos\alpha & sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$ il cui determinante è -1

Tali matrici hanno significato di rotazione di angolo α con centro nell'origine.
Le rotazioni R(α) sono un gruppo in cui l'unità è R(0)
l'inverso di R(α) è R(-α)
l'operazione di composizione equivale alla rotazione somma degli angoli R(α)°R(β)=R(β+α)
in senso antiorario

Infine da quanto visto possiamo dire che nel piano **le isometrie sono le affinità derivate da composizioni di rotazioni e traslazioni.**

OMOTETIE E SIMILITUDINI

Altre particolari trasformazioni affini sono le **OMOTETIE** di centro O e rapporto k : A'B' = k AB

Vediamo come caratterizzare i coefficienti di una matrice lineare affinché sia una omotetia.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$x' = a\,x + \mathrm{by}$ $\qquad\qquad y' = c\,x + dy$

Siano $A = \left(x_A, y_a\right)$ *e* $B\left(x_B, y_B\right)$ *due generici punti* e $A' = \left(x'_A, y'_A\right)$ *e* $B' = \left(x'_B, y'_B\right)$ i punti immagine nella omotetia

Per definizione dovrà essere d(A',B') = k d(A , B)

$$d(A', B') = \sqrt{\left(x'_A - x'_B\right)^2 + \left(y'_A - y'_B\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(x_A - x_B\right)^2\left(a^2 + c^2\right) + \left(y_A - y_B\right)^2\left(b^2 + d^2\right) + 2\left(x_A - x_B\right)\left(y_A - y_B\right)(ab + cd)}$$

che porta alle condizioni $a^2 + c^2 = k^2$ $\qquad b^2 + d^2 = k^2$ $\qquad ab + cd = 0$ e alle matrici

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} (\textit{omotetia diretta}) \quad \textit{oppure} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} (\textit{omotetia inversa})$$

Componendo omotetie con traslazioni otteniamo le **SIMILITUDINI (dirette o inverse)**