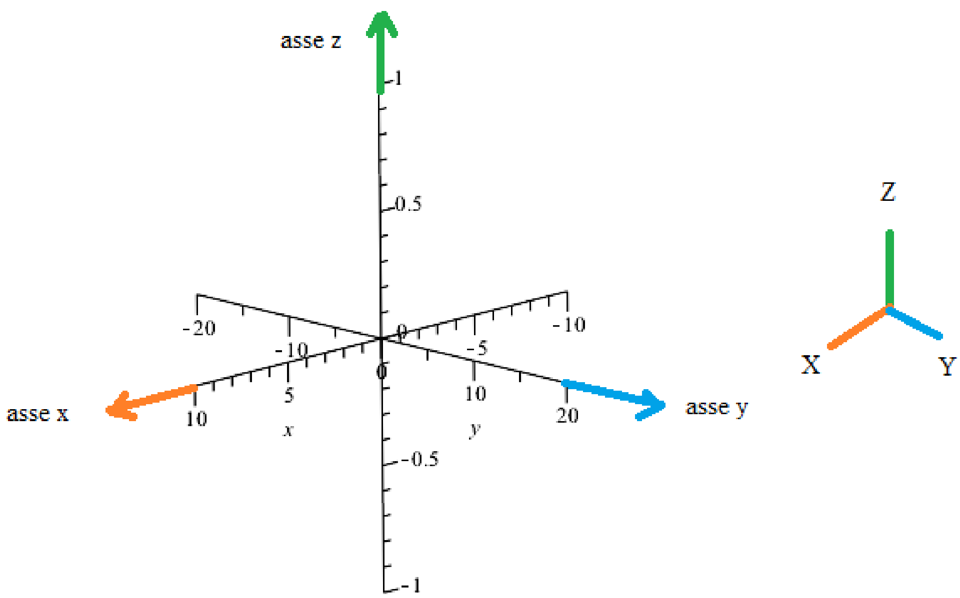
GEOMETRIA ANALITICA IN R^3

Riferimento Cartesiano

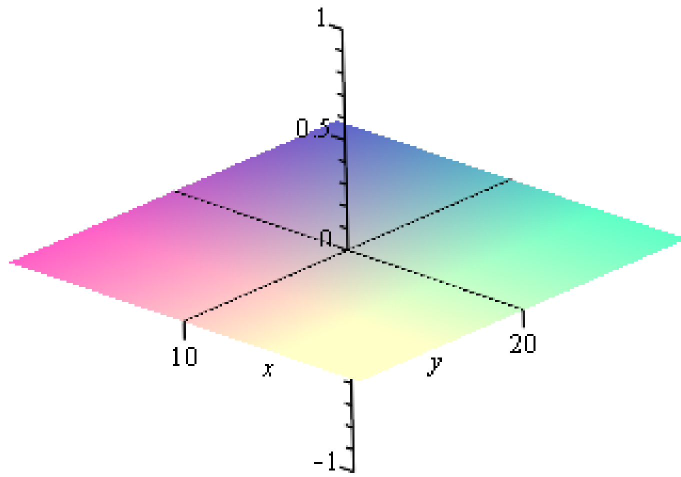


Ogni punto ha 3 coordinate : x , y e z

i punti A(a , 0 , 0) appartengono all'asse x
i punti B(0 , b , 0) appartengono all'asse y
i punti C(0 , 0 , c) appartengono all'asse z
il punto origine O ha coordinate (0 , 0 ,0)

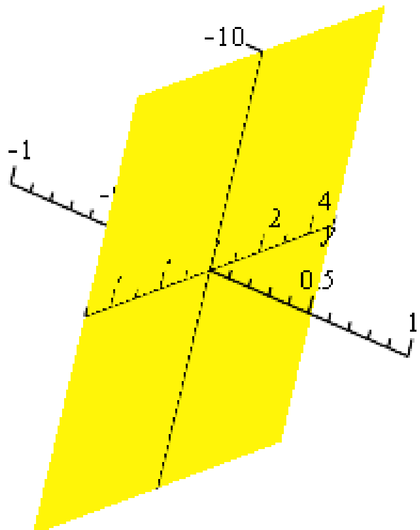
Oxy
i punti E(0 , b , c) appartengono al piano Oyz
i punti F(a , 0 , c) appartengono al piano Oxz

piano Oxy appartengono al piano i punti D(a , b , 0)
with(*plots*) :
plot3d(0 , $x = -10..10$, $y = -20..20$)



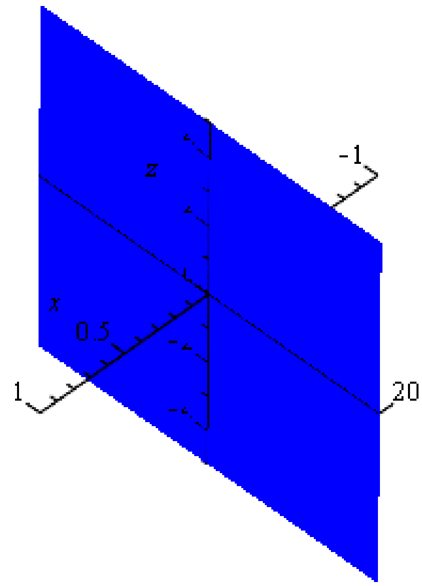
piano Oxz appartengono al piano i punti F(a , 0 , c)

implicitplot3d$(y = 0\ , x = -10\,..10\ \ , y = -5\,..5,\ \ z = -5\,..5)$



piano Oyz appartengono al piano i punti E(0 , b , c)

implicitplot3d$(x = 0\ ,\ x = -10\,..10\ ,\ y = -20\,..20\ ,\ z = -5\,..5)$



LA DISTANZA TRA DUE PUNTI $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ estende la formula della distanza tra due punti nel piano :

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

I DIVERSI MODI DI SCRIVERE L'EQUAZIONE DI UN PIANO π

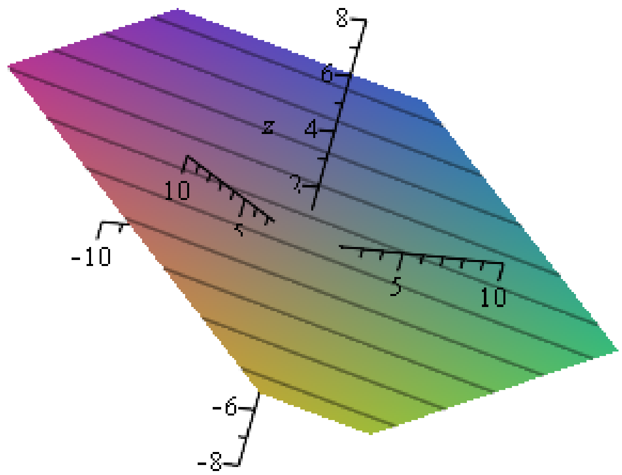
1) Si può generalizzare l'equazione cartesiana della retta

nel piano la retta ha equazione $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

nello spazio ... aggiungiamo una variabile e scriviamo $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$ (equazione cartesiana del piano π)

restart
with(plots) :

$implicitplot3d(4x + 5y + 8z - 10 = 0, x = -10..10, y = -10..10, z = -8..8)$



2) Abbiamo visto che una retta r passante per un punto $P0(x_0, y_0)$ e parallela ad un vettore $v = v_x \cdot i + v_y \cdot j$

è rappresentata dalle equazioni parametriche

$P = P0 + t \cdot v$ *che* **in** *componenti si traduce* :

$$\begin{bmatrix} x = x_0 + v_x \cdot t \\ y = y_0 + v_y \cdot t \end{bmatrix}$$

Analogamente un piano π è fissato non appena si conoscano le coordinate di un suo punto $P0(x_0, y_0, z_0)$

e due vettori u e v tra loro non paralleli.

Per i vettori avremo

$$u = u_x \cdot i + u_y \cdot j + u_z \cdot k \qquad e \qquad v = v_x \cdot i + v_y \cdot j + v_z \cdot k$$

Le sue equazioni parametriche del piano saranno quindi $P = P0 + l \cdot v + m \cdot u$

$$\left[\begin{array}{l} x = x_0 + v_x \cdot l + u_x \cdot m \\ y = y_0 + v_y \cdot l + u_y \cdot m \\ z = z_0 + v_z \cdot l + u_z \cdot m \end{array}\right]$$

3) Esiste una alternativa al modo 2 .
Assegnare il punto P0 ma considerare un vettore $w = w_x \cdot i + {}_y w \cdot j$
perpendicolare alla retta r (nel piano)
e in analogia un vettore $w = w_x \cdot i + {}_y w \cdot j + w_z \cdot k$
perpendicolare al piano π

Nel caso della retta r diremo : Dato P0 e un altro punto P(x,y,z) della retta il vettore PP0 è perpendicolare a w
per cui il loro prodotto scalare è nullo

La relazione P0P * w = 0 (prodotto scalare si P0P con w) è una terza equazione della retta.

$$\left(x - x_0\right) \cdot w_x + \left(y - y_0\right) \cdot w_y = 0 \quad \rightarrow w_x \cdot x + w_y \cdot y + \left(-w_x \cdot x_0 - w_y \cdot y_0\right) = 0$$

che confrontata con l'equazione cartesiana implicita ci dice che i coefficienti *a e b* sono le componenti di *w*.

In perfetta analogia , nel caso del piano π diremo : Dato P0 e un altro punto P(x,y,z) del piano il vettore PP0 è perpendicolare a w
per cui il loro prodotto scalare è nullo

La relazione P0P * w = 0 (prodotto scalare di P0P con w) è una terza equazione del piano

$$\left(x - x_0\right) \cdot w_x + \left(y - y_0\right) \cdot w_y + \left(z - z_0\right) \cdot w_z = 0 \quad \rightarrow w_x \cdot x + w_y \cdot y + w_z \cdot z + \left(-w_x \cdot x_0 - w_y \cdot y_0 - w_z \cdot z_0\right) = 0$$

che confrontata con l'equazione cartesiana implicita ci dice che i coefficienti *a , b e c* sono le componenti di *w*.

NOTA.

Equazione di un piano passante per punto $P(x0\,,y0\,,z0)$ e parallelo ai vettori

$u = u_x i + u_y j + u_z k$ e $v = v_x i + v_y j + v_z k$

$$det \begin{bmatrix} x - x0 & y - y0 & z - z0 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = 0$$

Equazione di un piano passante per tre punti A(xa , ya , za) B(xb , yb, zb) C(xc , yc ,zc)

$$det \begin{bmatrix} x - xa & y - ya & z - za \\ xa - xb & ya - yb & za - zb \\ xa - xc & ya - yc & za - zc \end{bmatrix} = 0$$

RAPPRESENTAZIONE DELLA RETTA NELLO SPAZIO

1. Per un punto P(x0, y0,z0) e parallela ad un vettore $u = u_x \cdot i + u_y \cdot j + u_z \cdot k$

equazioni parametriche $\begin{bmatrix} x = x0 + l\, u_x \\ y = y0 + l\, u_y \\ z = z0 + l\, u_z \end{bmatrix}$

2 Passante per due punti A(xa , ya , za) e B(xb , yb , zb)

Si determinano le componenti del vettore $AB = (xa - xb)\, i + (ya - yb)\, j + (za - zb)\, k$

Si sceglie uno dei due punti come punto base

Si scrivono le equazioni parametriche del punto 1

$$\begin{bmatrix} x = xa + l\,(xa - xb) \\ y = ya + l\,(ya - yb) \\ z = za + l\,(za - zb) \end{bmatrix}$$

3. Come intersezione di due piani $\pi 1$ e $\pi 2$

Se ricaviamo dalle equazioni parametriche il parametro l abbiamo

$$\frac{x - xa}{u_x} = \frac{y - ya}{u_y} = \frac{z - za}{u_z}$$

Prendendo a coppie queste uguaglianze

$$\frac{x - xa}{u_x} = \frac{z - za}{u_z}$$ (equazione piano $\pi 1$)

$$\frac{y - ya}{u_y} = \frac{z - za}{u_z}$$ (equazione piano $\pi 2$)

otteniamo la retta come intersezione dei due piani

La seguente componente interattiva serve per ricavare l'equazione cartesiana di un piano passante per i tre punti A , B e C .

	x	y	z	
A	0	0	0	scrivi l'equazione del piano
B	2	3	-4	
C	1	2	1	

11 x -6 y 1 z 0 =0

CODICE DEL PULSANTE scrivi l'equazione del piano

```
use DocumentTools in

    Use:

        A1:= Do( %xa-%xb) ;
        A2 := Do( %ya-%yb);
        A3 := Do( %za-%zb);
        B1 := Do( %xb-%xc);
        B2 := Do( %yb-%yc);
        B3 := Do( %zb-%zc);
        Do(%A =A2*B3 - A3*B2);
        Do(%B =A3*B1 - A1*B3);
        Do(%C =A1*B2 - A2*B1);
        Do(%D = -1*%xa*(A2*B3 - A3*B2)+%ya*(A1*B3-A3*B1)-1*%za*(A1*B2-A2*B1));
  end use;
```