CORREZIONE FORMATIVA PER MARTEDI'

ES 1 Scrivere l'equazione di una circonferenza che abbia centro
sul semiasse negativo delle ascisse e raggio 7.

Risposta. Prendiamo un punto sul semiasse negativo
ad esempio (-5 , 0) e questo sarà il centro
Allora la circonferenza avrà equazione

$(x+5)^2+y^2=49$

$$(x+5)^2+y^2=49 \qquad (1)$$

simplify(**(1)**)

$$x^2+10x+25+y^2=49 \qquad (2)$$

$x^2+y^2+10x-24=0$

Un qualunque altro punto di coordinate (- a , 0) con a>0 va bene come centro.

ES2 Su un riferimento cartesiano è tracciato un quadrato
di vertici O(0,0) A(h,0) B(h,h) C(0,h) con h>0
Scrivere l'equazione della circonferenza inscritta e circoscritta

Risposta . Il centro per entrambe le circonferenze
sarà il centro del quadrato $C\left(\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$

Il raggio della circonferenza inscritta sarà $\frac{h}{2}$

Il raggio della circonferenza circoscritta sarà
la metà della diagonale del quadrato $\frac{h}{2}\cdot\sqrt{2}$

Pertanto :

circonf. inscritta $\left(x-\frac{h}{2}\right)^2+\left(y-\frac{h}{2}\right)^2=\frac{h^2}{4}$

$$\left(x-\frac{1}{2}h\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}h\right)^2=\frac{1}{4}h^2 \qquad (3)$$

simplify(**(3)**)

$$x^2-xh+\frac{1}{2}h^2+y^2-yh=\frac{1}{4}h^2 \qquad (4)$$

$x^2+y^2-xh-yh+\frac{1}{4}h^2=0$

circonf. circoscritta $\left(x-\frac{h}{2}\right)^2+\left(y-\frac{h}{2}\right)^2=\frac{h^2}{2}$

$$\left(x-\frac{1}{2}h\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}h\right)^2=\frac{1}{2}h^2 \qquad (5)$$

simplify(**(5)**)

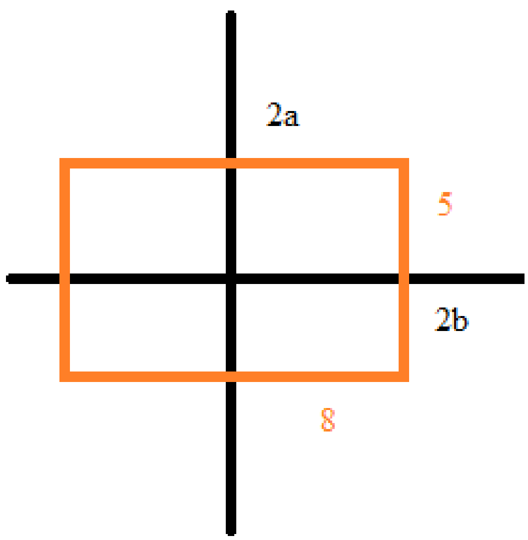
$$x^2 - x\,h + \frac{1}{2}\,h^2 + y^2 - y\,h = \frac{1}{2}\,h^2 \tag{6}$$

$x^2 + y^2 - xh - yh = 0$

ES 3 Scrivere l'equazione dell'ellisse massima contenuta in un rettangolo con :
lati paralleli agli assi coordinati di lunghezza 8 (orizz) e 5 (verticale)
il punto di incontro delle diagonali coincide con l'origine

Scrivere poi l'equazione della massima circonferenza contenuta nell'ellisse e l'equazione della minima circonferenza che contiene l'ellisse.

Risposta. Dai dati forniti dal problema segue il grafico di figura

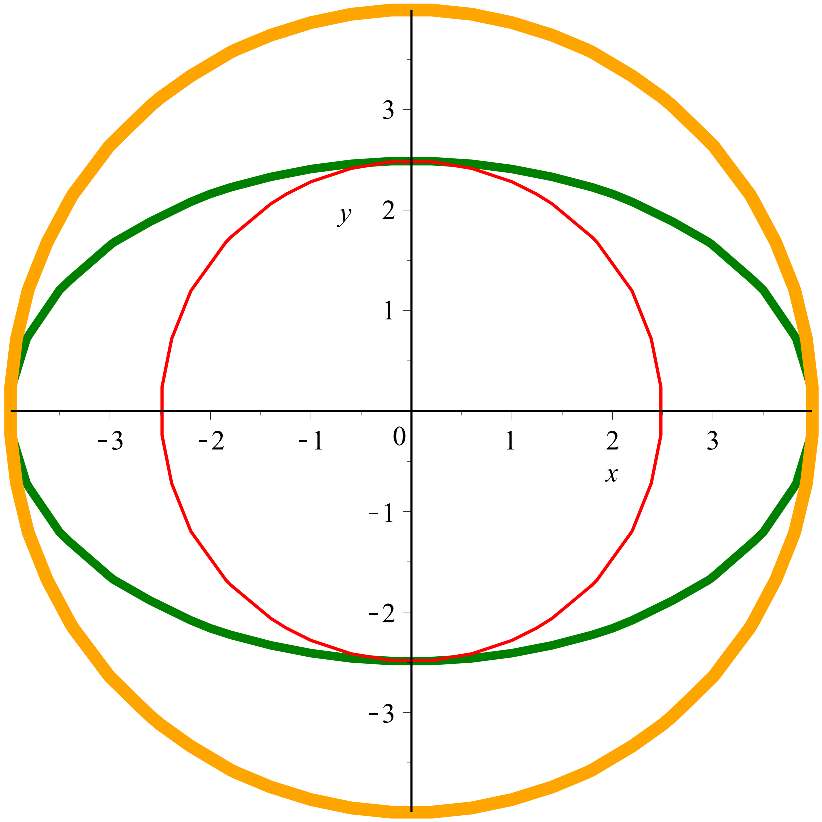


Chiaramente la massima ellisse sarà quella di semiassi a = 4 e b = 5/2

La sua equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{16} + \frac{4\,y^2}{25} = 1$

Il grafico seguente riporta l'ellisse con le due circonferenze richieste.
with(*plots*) :

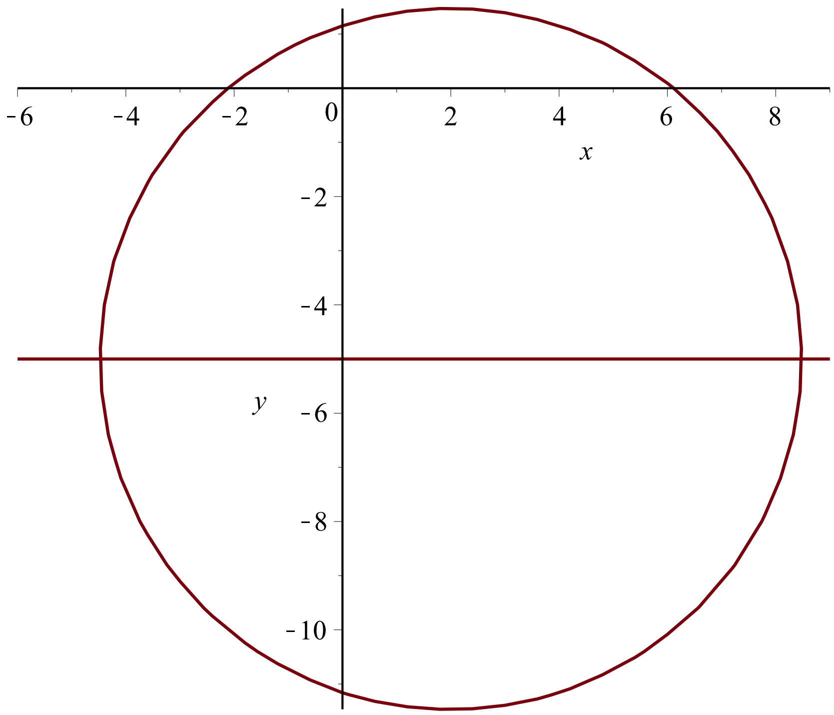
$$implicitplot\left(\left[\frac{x^2}{16} + \frac{4\cdot y^2}{25} = 1, x^2 + y^2 = \frac{25}{4}, x^2 + y^2 = 16\right], x = -5\,..5\,, y = -6\,..6\right)$$



Es 4 E' data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4\,x + 10\,y - 13 = 0$
Scrivere l'equazione di una circonferenza tangente internamente in un punto a destra del centro

La circonferenza ha centro C(2, -5) e raggio $\sqrt{42}$

$implicitplot\left(\left[x^2 + y^2 - 4\cdot x + 10\cdot y - 13 = 0\ , y = -5\right], x = -6\,..9\ , y = -12\,..8\right)$



La retta y=-5 incontra la circonferenza nei punti

$solve(\ x^2 - 4 \cdot x - 38 = 0\ ,\ x)$

$$2 + \sqrt{42}, 2 - \sqrt{42} \qquad \textbf{(7)}$$

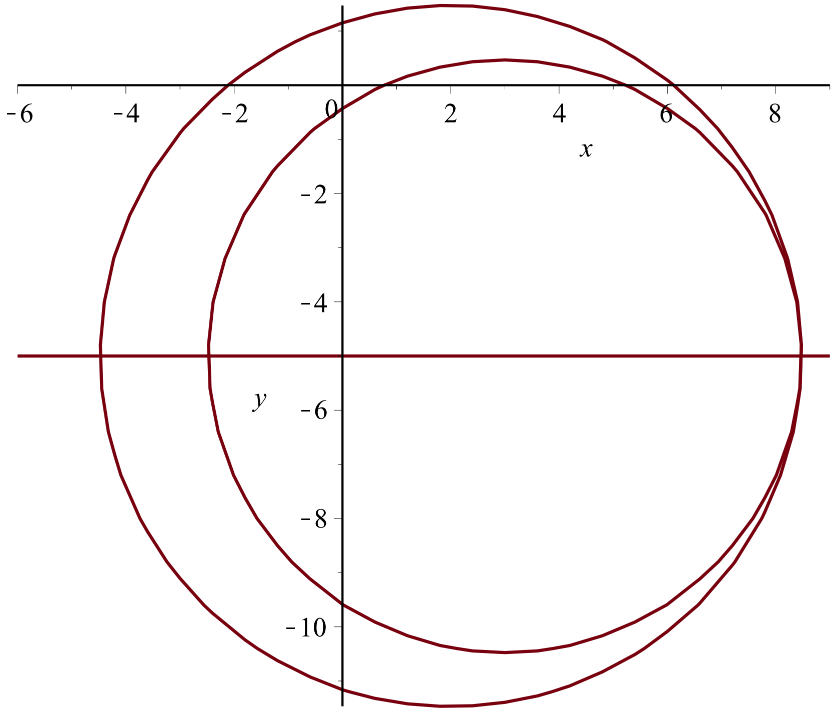
Il punto di coordinate $\left(\ 2 + \sqrt{42}\ ,\ -5\right)$ è un punto a destra del centro che può essere di tangenza.

La circonferenza interna deve avere il centro tra 2 *e* $2 + \sqrt{42}$ e raggio < $\sqrt{42}$

Ad esempio possiamo scegliere centro (3 , -5) e raggio $r = \sqrt{42} - 1$

La circonferenza avrà allora equazione $(x-3)^2 + (y+5)^2 = \left(\sqrt{42} - 1\right)^2$

$implicitplot\left(\ [x^2 + y^2 - 4 \cdot x + 10 \cdot y - 13 = 0\ ,\ y = -5, x^2 + y^2 - 6 \cdot x + 10 \cdot y - 9 + 2 \cdot \sqrt{42} = 0]\ , x = -6\ ..9\ ,\ y = -12\ ..8\right)$



ES 5 E' data l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{14} = 1$$

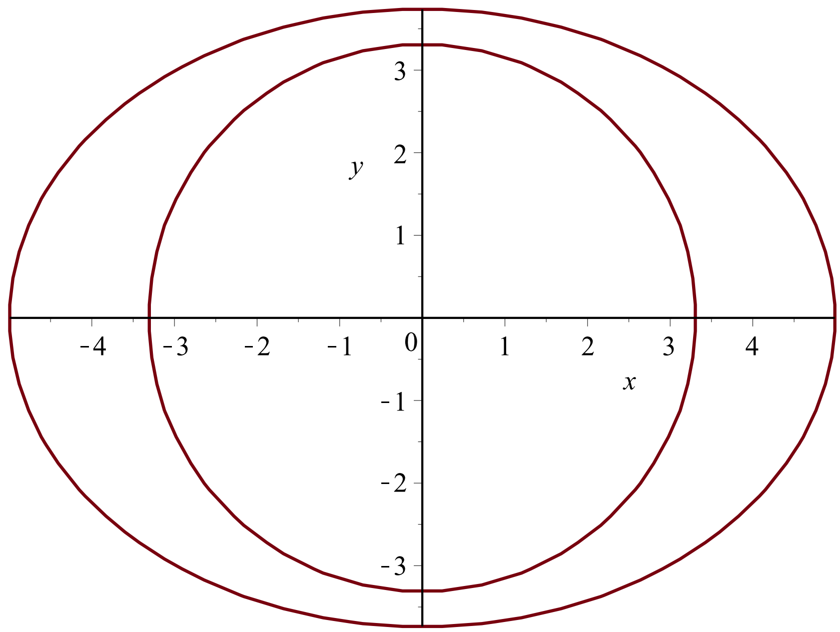
a)tracciare il grafico
b) scrivere equazione circonferenza passante per i fuochi

Risposta

Ellisse di semiassi a=5 b=$\sqrt{14}$ coordinata focale c = $\sqrt{11}$

grafico ellisse + circonferenza passante per i fuochi

$$implicitplot\left(\left[\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{14} = 1, x^2 + y^2 = 11\right], x = -6..6, y = -4..4\right)$$



circonferenza passante per i fuochi $x^2 + y^2 = 11$

c) determinare un punto P dell'ellisse e verificare che

$d(P, F1) + d(P, F2) = 2\,a$ dove nel nostro caso a = 5

Scegliamo ad esempio x= 1 da cui $y = \pm\ \frac{4}{5}\sqrt{21}$ $P\left(1\,,\ \frac{4}{5}\cdot\sqrt{21}\right)$

$F1\left(-\sqrt{11}\,, 0\right)$ $F2\left(\sqrt{11}\,, 0\right)$

$d(P, F1) = \sqrt{\left(1 + \sqrt{11}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\cdot\sqrt{21}\right)^2}$ $d(P, F2) = \sqrt{\left(1 - \sqrt{11}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\cdot\sqrt{21}\right)^2}$

Svolgendo i calcoli abbiamo

$d(P, F1) = \sqrt{\frac{636}{25} + \cdot\sqrt{44}}$ e $d(P, F2) = \sqrt{\frac{636}{25} - \sqrt{44}}$

Le due espressioni si semplificano ricordando la regola dei radicali doppi

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}} \qquad dove \quad \sqrt{a^2 - b} = c$$

Con qualche calcolo otteniamo $c = \frac{614}{25}$ da cui :

$$d(P, F1) = \sqrt{\frac{\frac{636}{25} + \frac{614}{25}}{2}} + \sqrt{\frac{\frac{636}{25} - \frac{614}{25}}{2}} = \sqrt{25} + \sqrt{\frac{22}{50}}$$

$$d(P, F2) = \sqrt{\frac{\frac{636}{25} + \frac{614}{25}}{2}} - \sqrt{\frac{\frac{636}{25} - \frac{614}{25}}{2}} = \sqrt{25} - \sqrt{\frac{22}{50}}$$

Sommando risulta $d(P, F1) + d(P, F2) = 2 \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 2 \cdot a$

La relazione è quindi verificata.

Fine