Il Professore

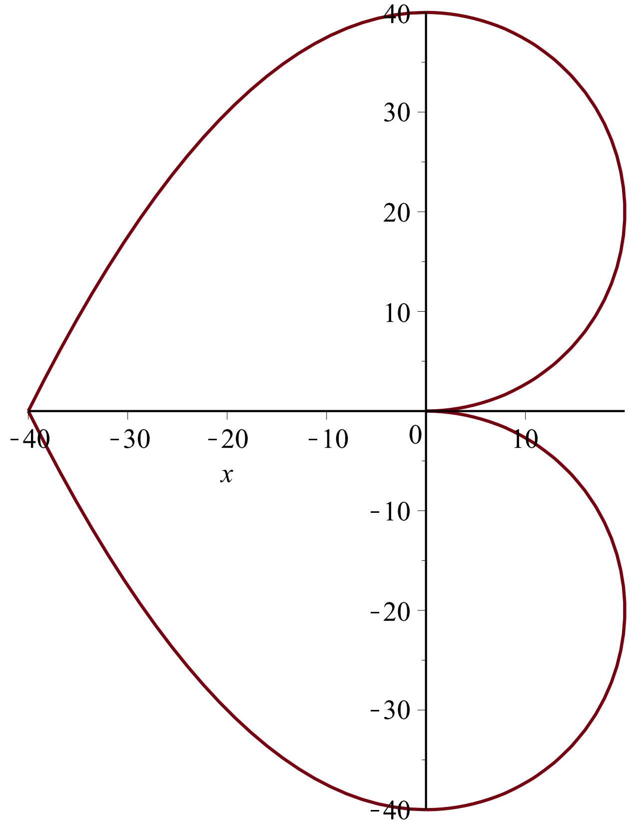
Con i tuoi amici state visitando un antico borgo e siete attratti da una bottega diversa dalle altre, entrate incuriositi e incontrate il proprietario, un simpatico professore in pensione, che avendo appreso che siete liceali prossimi al diploma vi chiede di aiutarlo.
Un suo amico architetto deve arredare un negozio di prossima apertura, e gli ha commissionato degli oggetti di varia grandezza aventi tutti una base comune, il cui contorno è rappresentato dalla funzione:

$$|y| := -\frac{x^2}{2 \cdot b} + 2 \cdot b \ \text{ per } -2 \cdot b \le x \le 0 \ \cup x^2 + y^2 - 2 \cdot b \cdot |y| = 0 \ \ per \ 0 \le x \le b$$

con b numero positivo, il professore vi dice che tracciando il grafico della funzione avrete una simpatica sorpresa.

a. Per procedere con l'acquisto dei materiali di costruzione vuole calcolare, al variare di b, il volume delle basi dei gadget (sapendo che lo spessore sarà b/8)
b. Tra gli oggetti commissionati vi è uno che deve essere costruito in una pietra lavica avente peso specifico 0,75 kg/dm^3, occorre determinare b affinchè la massa dell'oggetto non superi 800 g
c. Per b=10 cm, vuole sapere quanti cuscini può creare utilizzando l'imbottitura fornitagli dal cliente di circa 100 dm^3. I cuscini hanno per x=0 la sezione che è una ellisse avente asse maggiore quadrupla rispetto l'asse minore.
d. Il professore vuole creare un sito di e-commerce sia per pubblicizzare il borgo che per vendere i propri articoli. Vorrebbe che il suo sito fosse visitato da almeno 100.000 potenziali acquirenti. Assumendo che la velocità di crescita del numero dei potenziali visitatori che vengono a conoscenza del sito è proporzionale allo 20% del numero di persone che ancora non lo conoscono, e che all'inizio il sito non sarà noto. Si vuole stimare dopo un anno quanti potenziali visitatori conosceranno il sito (t è espresso in settimane).

SOLUZIONE



SOLUZIONE 1

Il calcolo del volume sarà dato dall'area della figura moltiplicato per lo spessore b/8
Per il calcolo dell'area di base aggiungo l'area del cerchio più il doppio dell'area dell'arco di parabola

$$a1 := \int_{-2\cdot b}^{0} \left(-\frac{x^2}{2\cdot b} + 2\cdot b \right) \mathrm{d}x$$

$$\frac{8}{3}\,b^2 \qquad \mathbf{(1.1.1)}$$

$A := 2\cdot\mathbf{(1.1.1)} + \pi\cdot b^2$

$$\frac{16}{3}\,b^2 + \pi\,b^2 \qquad \mathbf{(1.1.2)}$$

$V := \frac{b}{8}\cdot\mathbf{(1.1.2)}$

$$\frac{1}{8}\,b\left(\frac{16}{3}\,b^2 + \pi\,b^2\right) \qquad \mathbf{(1.1.3)}$$

SOLUZIONE 2.

with(Units[Natural]) :

Il peso è dato dal prodotto del volume per il peso specifico

Il peso^2 è dato dal prodotto del volume per il specifico **(1.2.1)**

$V := \pi\cdot\int_0^b (b-x)^2\,\mathrm{d}x p := \mathbf{(1.1.3)}\cdot 0.75$

$$0.09375000000\,b\left(\frac{16}{3}\,b^2 + \pi\,b^2\right) \qquad \mathbf{(1.2.2)}$$

$solve(\mathbf{(1.2.2)} = 0.8, b)$

$1.002292004,\ -0.5011460018 + 0.8680103371\,\mathrm{I},\ -0.5011460018 - 0.8680103371\,\mathrm{I}$ **(1.2.3)**

$b1 := 1\ dm$

$$dm \qquad \mathbf{(1.2.4)}$$

SOLUZIONE 3

Dividendo il volume totale come somma di volumi, nell'area x > 0 dobbiamo calcolare il volume dell'elissoide (2 semi elissoidi) aventi

semiassi b e $\frac{b}{2}$

Pertanto, al variare di x (0≤x≤b) i semiassi saranno (b-x) e

$$\frac{(b-x)}{2}$$

$V := 2\cdot \pi\cdot \int_0^b \frac{(b-x)^2}{2}\, dx$

$$\frac{1}{3}\pi b^3 \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

per x<0 il volume è dato dalla somma integrale generalizzata dell'area dell'ellisse di semiassi 2b e $\frac{b}{2}$. Al variare di x i due semiassi saranno

(2b-x) e $\frac{(2b-x)}{4}$

$V1 := \pi\cdot \int_{-2\cdot b}^{0} \frac{(2\cdot b-x)^2}{4}\, dx$

$$\frac{14}{3}\pi b^3 \qquad \textbf{(1.3.2)}$$

$V2 := V + V1$

$$5\pi b^3 \qquad \textbf{(1.3.3)}$$

per b=10 cm=1 dm, Vcusc=15,7 dm^3

dunque con 100 dm^3 potrà confezionare $\frac{100}{15,7}$ *cuscini* (~ 6)

SOLUZIONE 4

$y' = k(1-y)$

$$\frac{d}{dx}y(x) = k(1-y(x)) \qquad \textbf{(1.4.1)}$$

$k = 0.2$

$$k = 0.2 \qquad \textbf{(1.4.2)}$$

$y(0) = 0$

$$y(0) = 50 \qquad \textbf{(1.4.3)}$$

$\frac{dy}{dt} = 0.2\cdot(1-y) \Rightarrow \frac{dy}{1-y} = 0.2\, dt$

$$y = 1 - e^{-0.2\,t} \qquad \textbf{(1.4.4)}$$

$\ln|1-y| = 0.2\cdot t + c \Rightarrow |1-y| = e^{0.2\cdot t + c} \Rightarrow 1 - y = \pm e^{0.2\cdot t + c} \Rightarrow y = 1 \pm e^{0.2\cdot t + c}$

$y(0) = 1 \pm e^{c} = 0 \Rightarrow e^{c} = 1 \Rightarrow c = 0$

$y = 1 + e^{0.2 \cdot t}$

$1 \; anno = 52 \; settimane \; ossia \; t = 52$

$y = 1 + e^{0.2 \cdot 52}$

$$y = 1 + e^{10.4} \tag{1.4.5}$$

sarà conosciuto da circa 32.860 *potenziali acquirenti*
100000 *visitatori ci saranno dopo circa* 58 *settimane*

$100000 = 1 + e^{0.2 \cdot t} \;\Rightarrow\; e^{0.2 \cdot t} = 99999 \;\Rightarrow\; 0.2 \cdot t = \ln(99999) \;\Rightarrow\; t \approx 58 \; settimane$