1. Scrivere l'equazione di una circonferenza che passa per tre punti assegnati

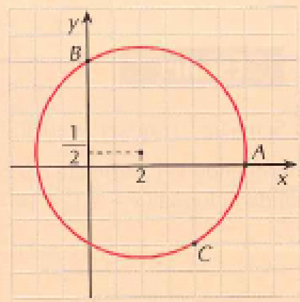
Dallo studio della geometria sappiamo che per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza; la prima cosa da fare è quindi verificare questa condizione. Basta poi sostituire le coordinate di ciascuno dei punti nell'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e risolvere il sistema ottenuto.
Per esempio, scriviamo l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A(6, 0)$, $B(0, 4)$, $C(4, -3)$.

I punti non sono allineati; costruiamo il sistema che si ottiene imponendo il passaggio per tali punti:

$$\begin{cases} 36 + 0 + 6a + c = 0 & \text{passaggio per } A \\ 0 + 16 + 4b + c = 0 & \text{passaggio per } B \\ 16 + 9 + 4a - 3b + c = 0 & \text{passaggio per } C \end{cases}$$

Risolvendolo troviamo che $a = -4$, $b = -1$, $c = -12$.
L'equazione della circonferenza è quindi: $x^2 + y^2 - 4x - y - 12 = 0$.
Il centro di questa circonferenza è il punto di coordinate $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, il raggio è $r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 1 + 48} = \frac{1}{2}\sqrt{65}$ ed il suo grafico è in ***figura 20***.

Figura 20



2. Scrivere l'equazione di una circonferenza noti i punti estremi di un diametro

Il problema è facilmente risolvibile pensando che il centro della circonferenza è il punto medio del diametro e che il raggio è la sua metà.
Per esempio, scriviamo l'equazione della circonferenza che ha come diametro il segmento di estremi $A(-2, -1)$ e $B(4, 3)$.

Il centro della circonferenza è il punto C di coordinate

$$x_C = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \qquad y_C = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad C(1, 1)$$

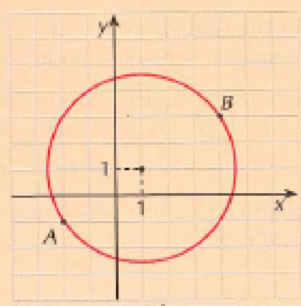
Il raggio è la misura del segmento AC (o anche la metà del segmento AB):

$$\overline{AC} = \sqrt{(1 + 2)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{13}$$

La circonferenza ha quindi equazione (***figura 21***):

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 13 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$$

Figura 21



3. Scrivere l'equazione di una circonferenza che ha il centro su una retta

Basta imporre che le coordinate del centro, che sono $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ soddisfino l'equazione della circonferenza.

Per esempio scriviamo l'equazione della circonferenza che ha il centro sulla retta $x - 2y + 2 = 0$ e che passa per i punti $A(-1, 3)$ e $B(4, -2)$.
Costruiamo il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} - 2\left(-\frac{b}{2}\right) + 2 = 0 & \text{le coordinate del centro soddisfano l'equazione della retta} \\ 1 + 9 - a + 3b + c = 0 & \text{passaggio per } A \\ 16 + 4 + 4a - 2b + c = 0 & \text{passaggio per } B \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene: $a = -8$, $b = -6$, $c = 0$

L'equazione della circonferenza è quindi $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

Il suo centro è il punto $C(4, 3)$, il suo raggio è $r = \frac{1}{2}\sqrt{64 + 36} = 5$ ed il grafico è in ***figura 22***.

Figura 22