1. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$, vogliamo conoscere la posizione delle rette di equazioni:

- $r: \quad 2x - y + 1 = 0$
- $s: \quad x + y + 2\sqrt{5} - 3 = 0$
- $t: \quad 2x - 3y + 18 = 0$

La circonferenza ha centro in $C(1, 2)$ e raggio $\quad r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 20} = \sqrt{10}.$

Calcoliamo la distanza del centro da ciascuna delle due rette:

- distanza di C da r: $\quad \frac{|2 - 2 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

  poichè la distanza è minore del raggio, la retta r è secante rispetto alla circonferenza. Per trovare i punti di intersezione si deve risolvere il sistema

  $$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

  dal quale si ottengono i punti di coordinate $\quad (2, 5) \quad$ e $\quad \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

- distanza di C da s: $\quad \frac{|1 + 2 + 2\sqrt{5} - 3|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{10}$

  poichè la distanza trovata è uguale al raggio, la retta s è tangente alla circonferenza.

  Il punto di tangenza si ottiene risolvendo il sistema $\quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0 \\ x + y + 2\sqrt{5} - 3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad (1 - \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5})$

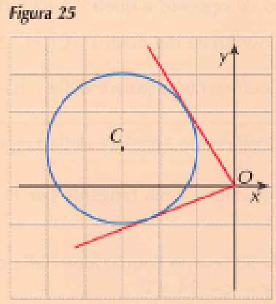
- distanza di C da t: $\quad \frac{|2 - 6 + 18|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{14\sqrt{13}}{13}$

  poichè la distanza è maggiore del raggio, la retta t è esterna alla circonferenza.

2. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$, vogliamo scrivere le equazioni delle rette ad essa tangenti passanti per l'origine degli assi.

L'origine è un punto esterno alla circonferenza (***figura 25***) e dunque troveremo due rette tangenti. Possiamo procedere in due modi.

Figura 25



I modo

Scriviamo l'equazione del fascio di rette di centro O e, impostato il sistema formato dalle equazioni della circonferenza e del fascio di rette, imponiamo che il discriminante dell'equazione risolvente sia nullo.

Equazione del fascio di rette di centro O: $\quad y = mx$

Sistema: $\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0 \\ y = mx \end{cases}$

Equazione risolvente: $\quad (1 + m^2)x^2 + 2(3 - m)x + 6 = 0$

Discriminante: $\quad \frac{\Delta}{4} = (3 - m)^2 - 6(1 + m^2)$

Condizione di tangenza: $\quad (3 - m)^2 - 6(1 + m^2) = 0 \quad \rightarrow \quad 5m^2 + 6m - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \frac{-3 \pm 2\sqrt{6}}{5}$

Le rette tangenti si ottengono attribuendo ad m i valori trovati: $\quad y = \frac{-3 - 2\sqrt{6}}{5}x \quad$ e $\quad y = \frac{-3 + 2\sqrt{6}}{5}x$

II modo

Scriviamo l'equazione del fascio di rette di centro O e ricerchiamo, fra esse, le rette la cui distanza dal centro è uguale al raggio.

Equazione del fascio di rette in forma implicita: $\quad -mx + y = 0$

Centro della circonferenza: $\quad C(-3,1)$

Misura del raggio: $\quad r = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4 - 24} = 2$

Distanza del centro dal fascio di rette: $\quad \frac{|3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

Equazione da risolvere: $\quad \frac{|3m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$

Risolvendo l'equazione si ottengono gli stessi valori trovati con il metodo precedente.

3. Scriviamo l'equazione della retta tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ nel suo punto P di ascissa 3 e ordinata positiva.

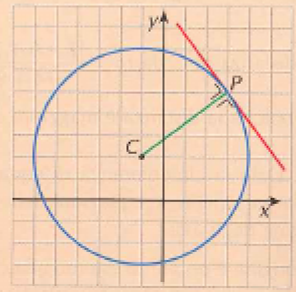
Troviamo innanzi tutto l'ordinata di P andando a sostituire nell'equazione della circonferenza:

$9 + y^2 + 6 - 4y - 20 = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 - 4y - 5 = 0$ da cui $y = 5 \vee y = -1$. Dunque $P(3, 5)$

Per determinare l'equazione della retta tangente ad una circonferenza in un suo punto, possiamo procedere, oltre che con i metodi del sistema con il discriminante nullo e della distanza dal centro uguale al raggio, anche considerando che la retta tangente è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza (***figura 26***).

Detto C il centro della circonferenza, possiamo direttamente scrivere l'equazione della retta che passa per P e che ha coefficiente angolare inverso ed opposto a quello della retta CP.

Figura 26



Coordinate del centro $C(-1, 2)$

Coefficiente angolare della retta CP $\quad \frac{5-2}{3+1} = \frac{3}{4}$

Coefficiente angolare della tangente $\quad -\frac{4}{3}$

Equazione della tangente per P $\quad y - 5 = -\frac{4}{3}(x - 3)$ cioè svolgendo i calcoli $4x + 3y - 27 = 0$

4. Scriviamo l'equazione della circonferenza che ha centro in $C(3, -2)$ ed è tangente alla retta di equazione $4y - x + 24 = 0$.

I modo

Conoscendo le coordinate generiche del centro della circonferenza deve essere

$$-\frac{a}{2} = 3 \quad \wedge \quad -\frac{b}{2} = -2 \qquad \text{da cui} \qquad a = -6 \quad \wedge \quad b = 4$$

La terza equazione del sistema che dobbiamo impostare può essere individuata con la condizione di tangenza:

Sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ 4y - x + 24 = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y + c = 0 \\ 4y - x + 24 = 0 \end{cases}$

Equazione risolvente $\quad 17y^2 + 172y + 432 + c = 0$

Condizione di tangenza $\quad 86^2 - 17(432 + c) = 0$ da cui $c = \frac{52}{17}$

L'equazione della circonferenza è quindi

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + \frac{52}{17} = 0 \qquad \text{cioè} \qquad 17x^2 + 17y^2 - 102x + 68y + 52 = 0$$

II modo

Il raggio della circonferenza è la distanza del punto C dalla retta data $\quad r = \frac{|-8-3+24|}{\sqrt{16+1}} = \frac{13}{\sqrt{17}}$

Possiamo subito scrivere l'equazione della circonferenza richiesta

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = \frac{169}{17} \qquad \text{da cui} \qquad 17x^2 + 17y^2 - 102x + 68y + 52 = 0$$