8 *Risolvere l'equazione logaritmica*: $\log(x^2-6)=\log(5x+8)$. (1)

Si osservi, innanzi tutto, che i logaritmi contenuti nell'equazione data avranno significato soltanto se alla x si attribuiscono valori tali da rendere positivi simultaneamente i due polinomi: x^2-6 e $5x+8$.

Premesso ciò, passando, nella (1), dai logaritmi ai numeri, si ottiene l'equazione:

$$x^2-6=5x+8, \text{ ossia: } x^2-5x-14=0, \text{ le cui radici sono: } x_1=-2,\ x_2=7.$$

Soltanto la seconda soluzione è accettabile, perché per $x=-2$ i logaritmi dell'equazione data perdono significato.

9 *Risolvere l'equazione*: $2\log(x-3)=\log x-\log 4$. (1)

Procedendo nel solito modo, si ha:

$$\log(x-3)^2=\log\frac{x}{4}.$$

Dall'uguaglianza dei due logaritmi si deduce l'equazione algebrica:

$$(x-3)^2=\frac{x}{4}, \quad \text{le cui soluzioni sono:} \quad x_1=\frac{9}{4} \quad \text{e} \quad x_2=4.$$

Sostituendo questi valori nell'equazione data si nota che solo $x_2=4$ la verifica, mentre $x_1=\frac{9}{4}$ *non la soddisfa* perché $\frac{9}{4}$ rende negativa l'espressione $x-3$ che è l'argomento del logaritmo al primo membro.

Oppure: imponiamo la condizione di esistenza di ciascuno dei due membri della (1), ossia la *condizione di positività degli argomenti dei logaritmi*:

$$\begin{cases} x-3>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>3 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x>3.$$

L'equazione data (1) è quindi equivalente al seguente sistema misto:

$$\begin{cases} \log(x-3)^2=\log\dfrac{x}{4} \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2=\dfrac{x}{4} \\ x>3. \end{cases}$$

L'equazione ha per soluzioni:

$$x_1=\frac{9}{4} \quad \text{e} \quad x_2=4.$$

Di questi valori **solo** il secondo soddisfa la condizione $x>3$. Vuol dire che solo $x_2=4$ è soluzione dell'equazione data.

10 *Risolvere l'equazione logaritmica*: $\log(x+1)+\log(x-1)-\log(x-2)=\log 8$.

Si osservi, prima di tutto, che i logaritmi contenuti nell'equazione data avranno significato soltanto se alla x si attribuiscono valori tali da rendere positivi, simultaneamente, i tre polinomi: $x+1$, $x-1$, $x-2$, cioè tali da aversi:

$$x+1>0, \qquad x-1>0, \qquad x-2>0.$$

Premesso ciò, l'equazione data può essere scritta nella forma:

$$\log\frac{(x+1)(x-1)}{x-2}=\log 8,$$

da cui, passando dai logaritmi ai numeri:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-2}=8, \quad \text{cioè:} \quad x^2-8x+15=0,$$

le cui soluzioni sono $x_1=5$ e $x_2=3$, che sono entrambe accettabili, come è facile verificare.

11 *Risolvere l'equazione*: $1+\log_{27}(18+x)=\log_3 x$.

Poiché $1=\log_{27}27$ e $\log_3 x=\log_{27}x^3$, l'equazione data si può scrivere:

$$\log_{27}27+\log_{27}(18+x)=\log_{27}x^3, \quad \text{da cui:} \quad \log_{27}27(18+x)=\log_{27}x^3.$$

Questa equazione è equivalente al sistema misto:

$$\begin{cases} 27(18+x)=x^3 \\ 18+x>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-9)(x^2+9x+54)=0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x=9,$$

che è l'unica soluzione *reale* dell'equazione logaritmica data.

12 *Risolvere l'equazione logaritmica*:

$$\text{(1)} \qquad \frac{\log x + 5}{\log x + 2} - \frac{2}{5}(\log x + 5) = -\frac{2}{5}.$$

Innanzitutto deve essere $x > 0$ e $\log x + 2 \neq 0$, cioè $x \neq \frac{1}{100}$. Premesso ciò, la (1) si può trasformare nel modo seguente:

$$5\log x + 25 - 2(\log x + 5)(\log x + 2) = -2(\log x + 2),$$

ossia, dopo facili calcoli:

$$2(\log x)^2 + 7\log x - 9 = 0,$$

che è un'equazione di 2° grado nell'incognita $\log x$, che, risolta, dà:

$$\log x = 1 \qquad \text{e} \qquad \log x = -\frac{9}{2}.$$

Da $\log x = 1$, segue: $x = 10$;

e da $\log x = -\frac{9}{2}$, segue: $x = 10^{-\frac{9}{2}} = \frac{1}{10^4\sqrt{10}}$,

ed entrambe le soluzioni sono accettabili, perché positive.

13 *Risolvere l'equazione*: $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0$.

Essendo:

$$\log_x a = \frac{1}{\log_a x}, \ \log_{ax} a = \frac{1}{\log_a ax}, \ \log_{a^2x} a = \frac{1}{\log_a a^2x} = \frac{1}{2 + \log_a x},$$

l'equazione proposta si può scrivere:

$$\frac{2}{\log_a x} + \frac{1}{\log_a x + 1} + \frac{3}{\log_a x + 2} = 0,$$

e posto $\log_a x = t$, si ha:

$$\frac{2}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{3}{t+2} = 0, \quad \text{cioè:} \quad 6t^2 + 11t + 4 = 0,$$

da cui: $t_1 = -\frac{4}{3}$ e $t_2 = -\frac{1}{2}$, che sono entrambe accettabili.

Perciò:

$$\log_a x = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = a^{-\frac{4}{3}}; \qquad \log_a x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = a^{-\frac{1}{2}}.$$