SCHEDA 1.   GEORG   CANTOR  (3 marzo 1845 - 6 gennaio 1918)

Definizione di **insieme infinito** : è un insieme A in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme B

L'insieme N dei naturali è infinito perché è possibile metterlo in corrispondenza con un suo sottoinsieme infinito .Alcuni esempi

n $\rightarrow$ 2n ( corripondenza naturali con numeri pari)

n $\rightarrow$ 2n+1 (corrispondenza naturali con numeri dispari)

n $\rightarrow n^2$ (corrispondenza naturali con i quadrati )

n $\rightarrow n^3$ (corrispondenza naturali con i cubi)
ecc.

Definizione di **numero cardinale** : è il numero che indica quanti elementi ha un insieme

Ad esempio tutti gli insiemi di 5 elementi hanno come numero cardinale il 5

Con questa idea in testa Cantor disse che anche gli insiemi infiniti hanno un numero cardinale e chiamò $\aleph_0$ (aleph con zero) il numero che indica la numerosità dell'insieme N.

Successivamente dimostrò che anche Q (insieme dei numeri razionali ) ha come numero cardinale $\aleph_0$ ; in altre parole ci sono tante frazioni quanti i numeri naturali !

<u>La dimostrazione di Cantor</u> Si dispongono le frazioni in modo che in ogni riga la somma numeratore + denominatore = n°riga+1

1/1
2/1 1/2
3/1 2/2 1/3
4/1 3/2 2/3 1/4

........ e così via

In questo modo le frazioni vengono etichettate 1 , 2 , 3 ..... CDD

Poi dimostrò che R era più numeroso di N ( card(r) > card(N)) nel seguente modo :

<u>dimostrazione</u>

Se N ed R fossero ugualmente numerosi potremmo elencare i numeri reali tra 0 e 1 in formato decimale. Ad esempio

1 → 0, 86593214.....
2 → 0, 50000000...
3 → 0,762091532.....
ecc .
n → 0, $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 ... a_n$.........

A questo punto Cantor (in modo geniale) costruì un numero tra 0 e 1

Egli prese il numero formato dalla diagonale (nel nostro caso 0, 802 ....$a_n$....... )
e cambiò una cifra alla volta (ad esempio posso pensare di sottrarre 1 ad ogni cifra con la convenzione che 0-1 dia 1 )
Ebbene questo numero **non è nell'elenco**
Infatti differisce
dal primo per la prima cifra decimale
dal secondo per la seconda cifra decimale
dal terzo per la terza cifra decimale
.......
dall' n-esimo per la n-esima cifra decimale

Questo ragionamento implica che è falsa l'ipotesi di partenza
di corrispondenza biunivoca tra N ed R. CDD

Un'altro risultato inaspettato fu il seguente :
**Ci sono tanti punti in un segmento quanti nel quadrato che ha tale segmento per lato**

La dimostrazione (che non faremo) si basa su questa semplice osservazione

Se un punto del piano ha coordinate

$x = 0, a_1 a_2 a_3 ......a_n .....$ $\qquad y = 0, b_1 b_2 b_3 .....b_n .....$

possiamo costruire una funzione biunivoca

associandolo al punto z dell'asse delle ascisse di coordinate

$z = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 .........a_n b_n ......$

Dopo questi risultati che evidenziavano il comportamento anomalo degli insiemi infiniti Cantor trovò un metodo generale per costruire insiemi infiniti con cardinalità sempre maggiore , attraverso il seguente teorema :

**Se A è un insieme e P(A) è l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi**

**allora card(A) < card(P(A))**