Il modello differenziale.

In realtà, l'equazione pubblicata da Verhulst nel 1838 è un'*equazione differenziale ordinaria* (del primo ordine) non lineare:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\mathrm{t}} = r\left(1 - \frac{x}{X}\right)x \tag{2}$$

avendo assunto che il numero di individui x sia una funzione continua del tempo t. In generale, la derivata di x rispetto al tempo − che qui compare a primo membro − non è altro che la velocità (istantanea) con cui varia la grandezza x.
Questa equazione può essere integrata esattamente e ha come *soluzione generale*:

$$x(\mathrm{t}) = \frac{X}{1 + \left(\frac{X}{x_0} - 1\right)e^{-r\mathrm{t}}}$$

dove $x_0 = x(0)$ è la *condizione iniziale* (il valore iniziale dell'unica variabile di stato). Una soluzione x(t), per t ≥ 0, può dunque rappresentare l'evoluzione di una popolazione animale priva sì di predatori, ma che disponga di limitate risorse alimentari e ambientali.
Il coefficiente r può essere riguardato come la differenza tra i tassi di natalità e di mortalità della popolazione quando questa è piccola rispetto alla "portata massima" X dell'ambiente (il massimo numero di individui che l'ambiente può mantenere, detto anche "capacità portante"): in tal caso, infatti, la popolazione aumenterà a un tasso proporzionale alla quantità corrente (*riproduzione*). Mentre − come già abbiamo osservato − quando x si avvicina a X, il tasso di crescita della popolazione diminuisce in modo proporzionale a X meno la quantità corrente (*carestia*, con mortalità per fame dipendente dalla densità), giungendo a zero per $x = X$: ciò rappresenta il fatto che tutti gli individui sono in (crescente) competizione per un insieme finito di risorse, e così il tasso netto di crescita diminuisce all'aumentare della popolazione.
In questa applicazione si ha $x \geq 0$, sicché lo *spazio delle fasi* (vale a dire l'insieme dei valori che le variabili di stato, in questo caso la sola x, possono assumere) è l'insieme dei valori reali ≥ 0.
Si noti che, per $x_0 = 0$, si ha $x(\mathrm{t}) = 0$ per ogni t ≥ 0 e, per $x_0 = X$, si ha $x(\mathrm{t}) = X$ per ogni t ≥ 0: si tratta in effetti di due soluzioni di *equilibrio*.

Problema 3. Fissato $X = 1$, si scelgano vari valori (positivi) di r e, per ognuno di essi, si scelgano differenti valori (positivi) di x_0 e si disegnino i grafici delle corrispondenti funzioni x(t), per t ≥ 0, su uno stesso diagramma. Si confrontino poi i risultati ottenuti con gli analoghi (con stessi r e x_0) del problema precedente.