CORREZIONE FORMATIVA PER VERIFICA 22 – 03 – 2016

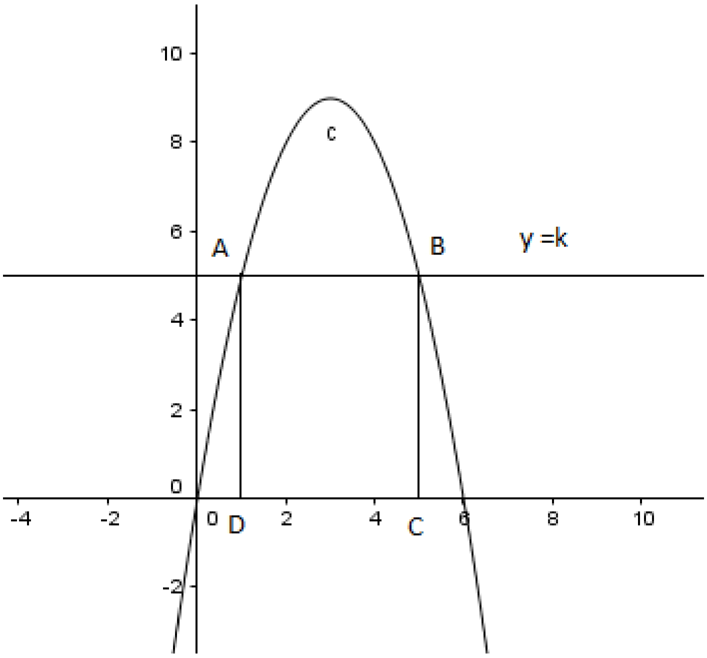
ES 1. Determinare i rettangoli di massimo e minimo perimetro , tra tutti quelli inscritti nella parte di piano limitata dalla parabola $y = -x^2 + 6x$ e dall'asse x.

Soluzione

La parabola ha la concavità rivolta verso il basso , il vertice in V(3 , 9) e intersezione con l'asse x in 0 e 6

Una generica retta parallela all'asse x di equazione y=k con (0≤ k ≤ 9) interseca la parabola in due punti

A e B che con i punti C e D (sull'asse x) sono i vertici di un generico rettangolo in questione.



Le coordinate di tali punti si determinano risolvendo il sistema

$$\{ \; y = -x^2 + 6x \qquad y = k$$

$$-x^2 + 6x - k = 0$$ che ha soluzioni

$$x_2 = \sqrt{-k+9} + 3,$$

$$x_1 = -\sqrt{-k+9} + 3$$

Pertanto le coordinate dei punti saranno

$$A\left(3 - \sqrt{9-k}, k\right) \quad B\left(3 + \sqrt{9-k}, k\right) \; C\left(3 + \sqrt{9-k}, 0\right) \; D\left(3 - \sqrt{9-k}, 0\right)$$

Siamo ora in grado di determinare la **funzione obiettivo perimetro P(k)**

P(k) = 2 (AB + BC) **=** $4\sqrt{9-k} + 2k$

Agli estremi del campo di variabilità di k abbiamo :

P(0) = 12 e P(9) = 18 che sono i perimetri di due rettangoli degeneri ; il primo ha solo due basi mentre il secondo ha solo due altezze

Passiamo ora allo studio della derivata prima P’(k).

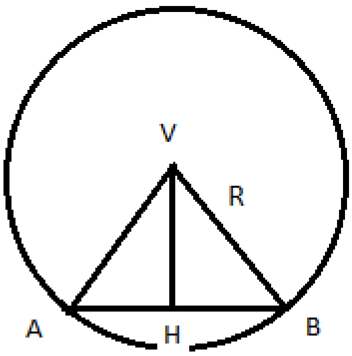
$$P'(k) = 2 + \frac{-1}{2\sqrt{9-k}}$$

La funzione P’(k) ha un solo zero k= 8 ed è crescente (positiva) per k<8 e decrescente (negativa) per k>8

Quindi il perimetro massimo si realizza per k = 8 e vale 20.

Il perimetro minimo si ha nel caso del rettangolo degenere per k=0 e vale 12.

Es 2 Determinare il cono di volume massimo inscritto in una sfera di raggio R con il vertice nel centro della sfera.



Soluzione . Come incognita x assumiamo la distanza VH.

Come variabilità abbiamo 0≤ x ≤ R

Per x=0 avremo un “cono piatto” tutto base e niente altezza

Per x = R avremo un cono “tutto altezza” e niente base

Il raggio r (BH) di base del cono sarà $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ e la funzione obiettivo volume

$$V(x) = \frac{\pi}{3}\, x\,(R^2 - x^2) = \frac{\pi}{3}\,(x\,R^2 - x^3)$$

Chiaramente agli estremi 0 ed R i coni degeneri avranno volume 0.

Passiamo allo studio della derivata prima V’(x)

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}\,(R^2 - 3x^2)$$

V’(x) ha due radici $x = \pm\frac{R}{\sqrt{3}}$ ed è positiva per valori interni al loro intervallo.

$$\searrow \; -\frac{R}{\sqrt{3}} \qquad \nearrow \qquad \frac{R}{\sqrt{3}} \; \searrow$$

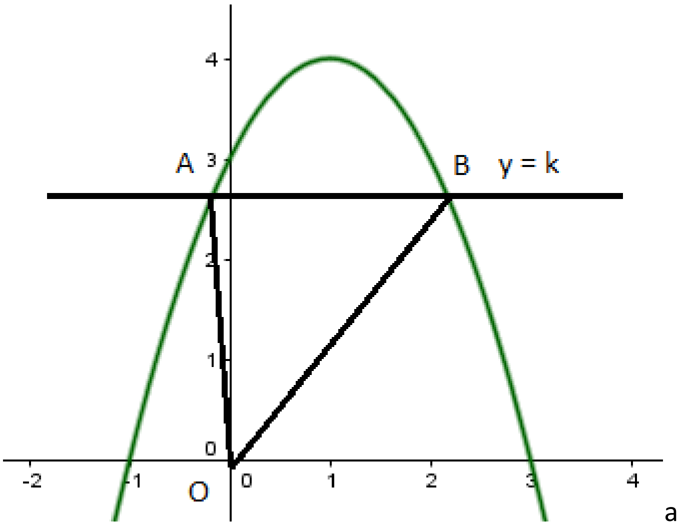
La radice positiva è un massimo a cui corrisponde il volume $V = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}R^3$

Nota . Il problema si può risolvere anche per via goniometrica assumendo come incognita x l'angolo HVB

Es 3 E' data la parabola $y = -x^2 + 2x + 3$; fra tutti i triangoli ,aventi un vertice nell'origine e gli altri due in punti della curva aventi la stessa ordinata positiva , trovare quelli di area massima

Soluzione

Tracciato il grafico della parabola , i triangoli in questione sono quelli del tipo ABO



L'area A (funzione obiettivo) possiamo pensarla funzione di k dove 0≤ k ≤ 4

Risolvendo il sistema parabola - retta troviamo per A e B le coordinate

$$A\left(1-\sqrt{4-k}\ ,k\right) \qquad B(1+\sqrt{4-k}\ ,k)$$

Da cui $AB = 2\sqrt{4-k}$ e $A(k) = k\sqrt{4-k}$

Calcoliamo ora la derivata prima

$$A'(k) = \sqrt{4-k} + \frac{-k}{2\sqrt{4-k}} = \frac{8-3k}{2\sqrt{4-k}}$$

che si annulla per k = 8/3 ed è positiva per valori minori di 8/3.

Dunque 8/3 è un massimo della funzione A(k) a cui corrisponde l'area di $\frac{16}{9}\sqrt{3}$