Laboratorio di Fisica V

Corso B

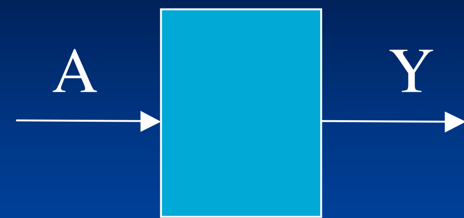
Prof. G. Punzi

Dalla volta scorsa….

Porte logiche

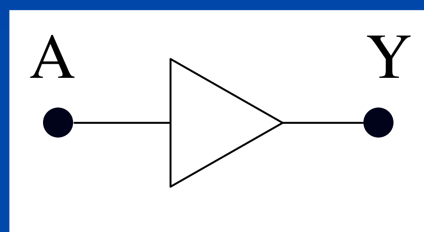
- Una semplificazione molto importante: vedremo presto che ogni funzione, con *qualunque numero di inputs* si puo' costruire combinando tra loro poche funzioni logiche (porte logiche) semplici.

Porte logiche a 1 input



A	Y
0	0
1	1

Identita'



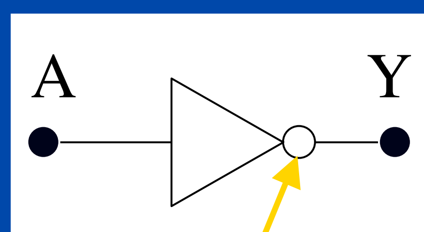
Costanti

A	Y
0	1
1	1

A	Y
0	0
1	0

A	Y
0	1
1	0

Y = NOT(A)



(il cerchietto indica negazione)

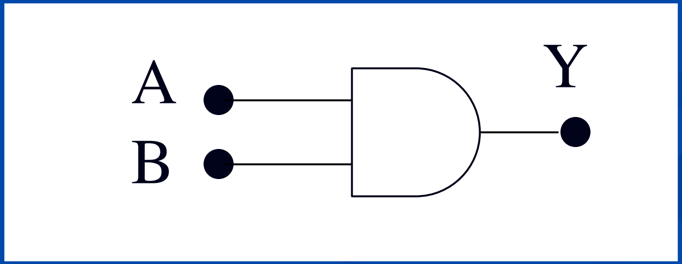
- Una sola funzione non banale: NOT(A) = $\overline{A}$

Porte con due input: AND

- In logica rappresenta la congiunzione: e’ vera se entrambi gli input sono veri. Si indica anche come “prodotto” A• B

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

AND

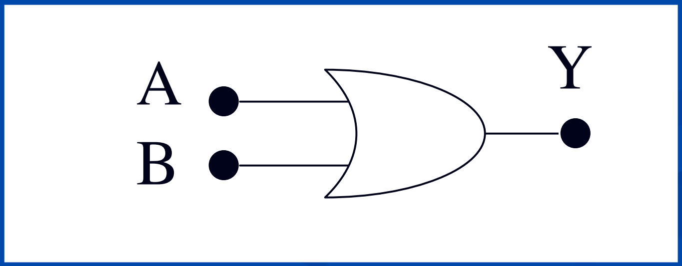


Porte con due input: OR

- E' vera se almeno un input e' vero. "Somma" logica: A+B

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OR

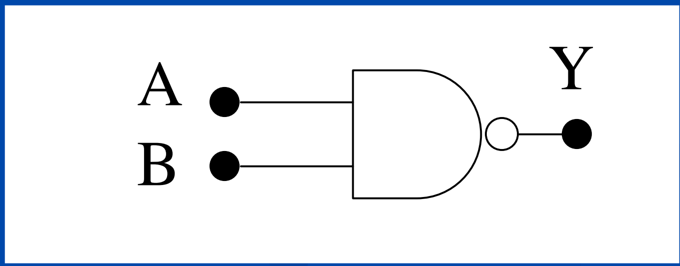


Porte con due input: NAND

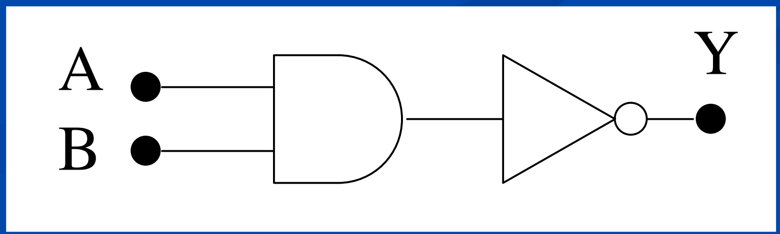
- Negazione dell'AND: NOT(A• B) = $\overline{A \cdot B}$. Si puo' costruire combinando un NOT con un AND.
  Ha pero' importanza a se', per motivi che vedremo.

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND



Combinazione equivalente a un NAND

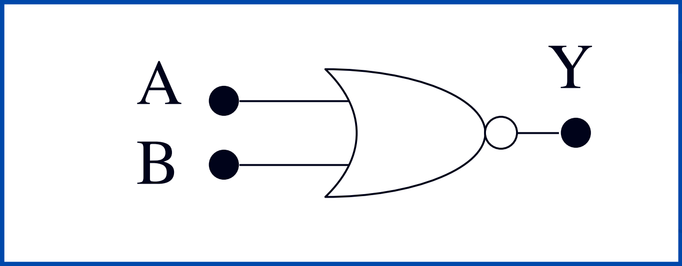


Porte con due input: NOR

- Negazione dell' OR: NOT(A + B) = $\overline{A+B}$

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NOR



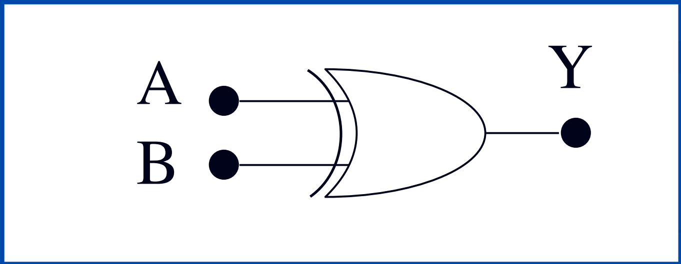
Porte con due input: XOR

- In logica e' lo "OR esclusivo": A o B, ma non entrambi. (E' un OR ad esclusione dell'AND):

$$A \text{ xor } B = A \oplus B$$

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XOR

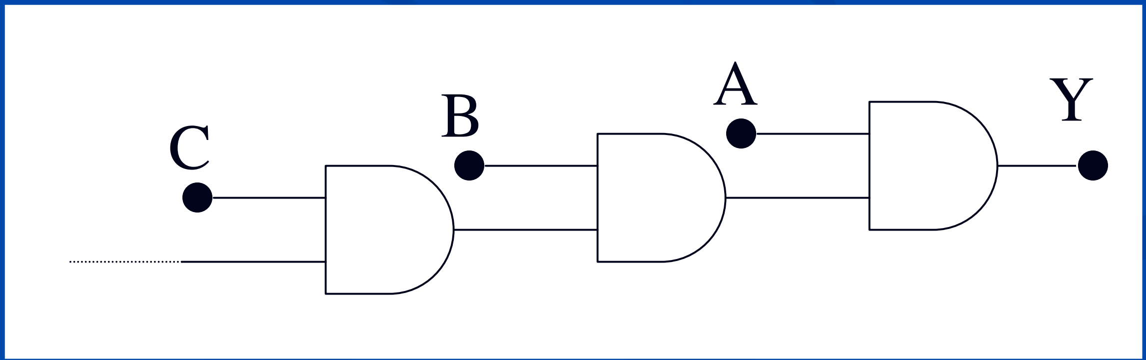


Alcune funzioni logiche a molti input sono generalizzazioni “ovvie”

- AND, OR si generalizzano facilmente a molti input
  - AND: vero quando TUTTI gli input sono veri
  - OR: vero quando ALMENO uno degli input e’ vero
- Entrambe si possono costruire a partire dalle porte a 2 input. (ma sono spesso disponibili commercialmente gia’ pronte).

A B C …	Y
0 0 0 …	0
…	…
1 1 1 …	1

Equivalente di AND multiplo



Quanti tipi di porte logiche servono ?

- Le porte descritte sono tutte disponibili in commercio sotto forma di vari *package.*
- Ma quanti tipi sono davvero necessari per costruire una funzione logica desiderata qualunque, con arbitrario numero di input ?
- Teorema: ogni funzione logica si puo' scrivere come somma di prodotti, o prodotto di somme, degli input (eventualmente negati)

- Questo significa: bastano OR, AND e NOT

Forme standard di funzioni logiche

- Metodo per la somma di prodotti:
  - Prendere ciascuna riga in cui L=1
  - Scrivere lo AND di tutte le variabili di input, negando quelle che fanno 0 sulla detta riga. (questo si chiama *minterm*)
  - Costruire lo OR di tutti i *minterm*
- Esempio: si scriva la funzione L

(per semplicita' omettiamo il punto per indicare il prodotto)

riga: 3 4 5 7 8

$$L = \bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}YZ + X\bar{Y}\bar{Z} + XY\bar{Z} + XYZ$$

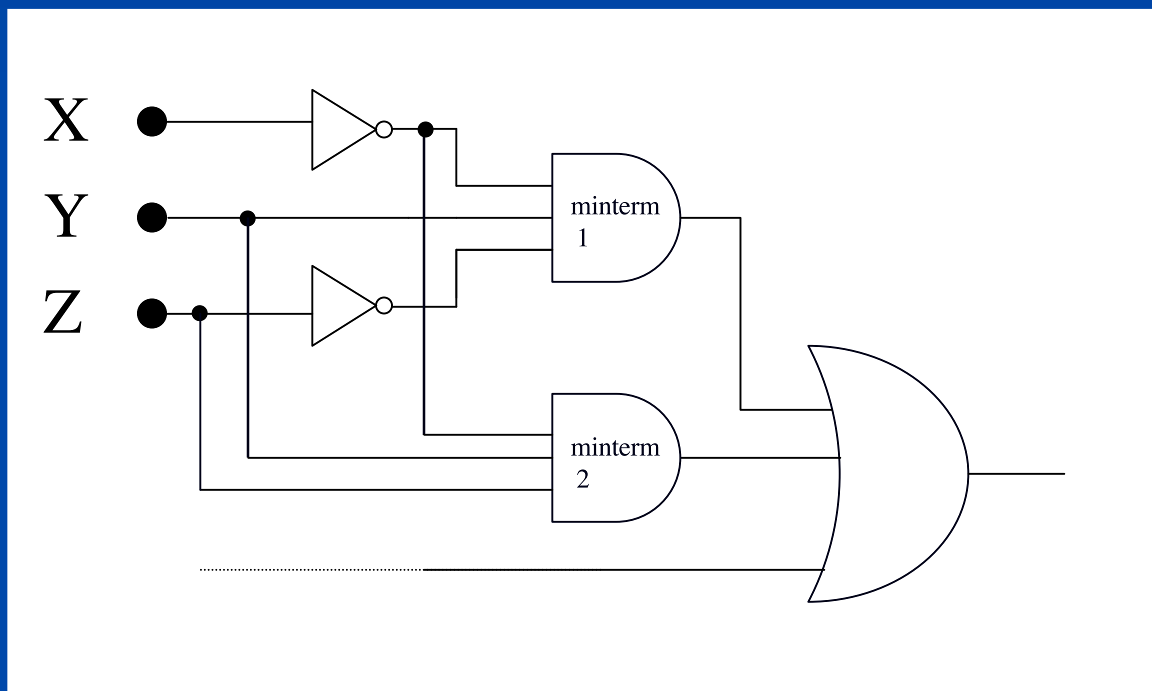
X Y Z	L
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

Si puo' cosi' costruire la funzione L usando solo AND, OR, NOT

Esempio composizione porte logiche

$$L = \bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}YZ + X\bar{Y}\bar{Z} + XY\bar{Z} + XYZ$$

Si puo’ realizzare come:



Alcune Identita' Booleane

- Le espressioni logiche possono spesso essere semplificate ricorrendo alle regole dell'algebra di Boole. Elenchiamo le piu' utili; esse possono essere facilmente dimostrate tramite esplicita costruzione delle tabelle di verita' corrispondenti.
- $A+B+C = (A+B)+C = A+(B+C)$ (associativita')
- $A \bullet B \bullet C = (A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$ (associativita')
- $A+B = B+A \quad , \quad A \bullet B = B \bullet A$ (commutativita')
- $A \bullet (B+C) = A \bullet B + A \bullet C$ (distributivita')
- $A+A = A \quad , \quad A \bullet A = A$ (idempotenza)
- $A+0 = A \quad , \quad A \bullet 1 = A$ (elemento neutro)
- $A+1 = 1 \quad , \quad A \bullet 0 = 0$ (elemento nullo)
- $A+(A \bullet B) = A \quad , \quad A \bullet (A+B) = A$ (ridondanza)
- $\overline{\overline{A}} = A \quad , \quad \overline{0} = 1$ (involutivita')
- $A + (\overline{A} \bullet B) = A+B \quad , \quad A \bullet (\overline{A}+B) = A \bullet B$ (eliminazione)
- $A \bullet \overline{A} = 0 \quad , \quad A+\overline{A} = 1$

Leggi di De Morgan

- Teoremi:

$$\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot \ldots} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}+ \ldots$$

$$\overline{A+B+C+D+\ldots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} \cdot \ldots$$

Molto utili per trasformare/semplificare espressioni

Es: conversione di Somma di Prodotti in Prodotto di Somme

Forma standard Prodotto

- Es. La funzione L considerata prima
- Scriviamo NOT(L) e neghiamolo

$$\overline{L} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z + X\overline{Y}Z$$

$$L = \overline{\overline{L}} = \overline{\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z + X\overline{Y}Z}$$

usando De Morgan:

$$L = (\overline{\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}})\cdot(\overline{\overline{X}\,\overline{Y}Z})\cdot(\overline{X\overline{Y}Z})$$

ancora De Morgan:

$$L = (X+Y+Z)\cdot(X+Y+\overline{Z})\cdot(\overline{X}+Y+\overline{Z})$$

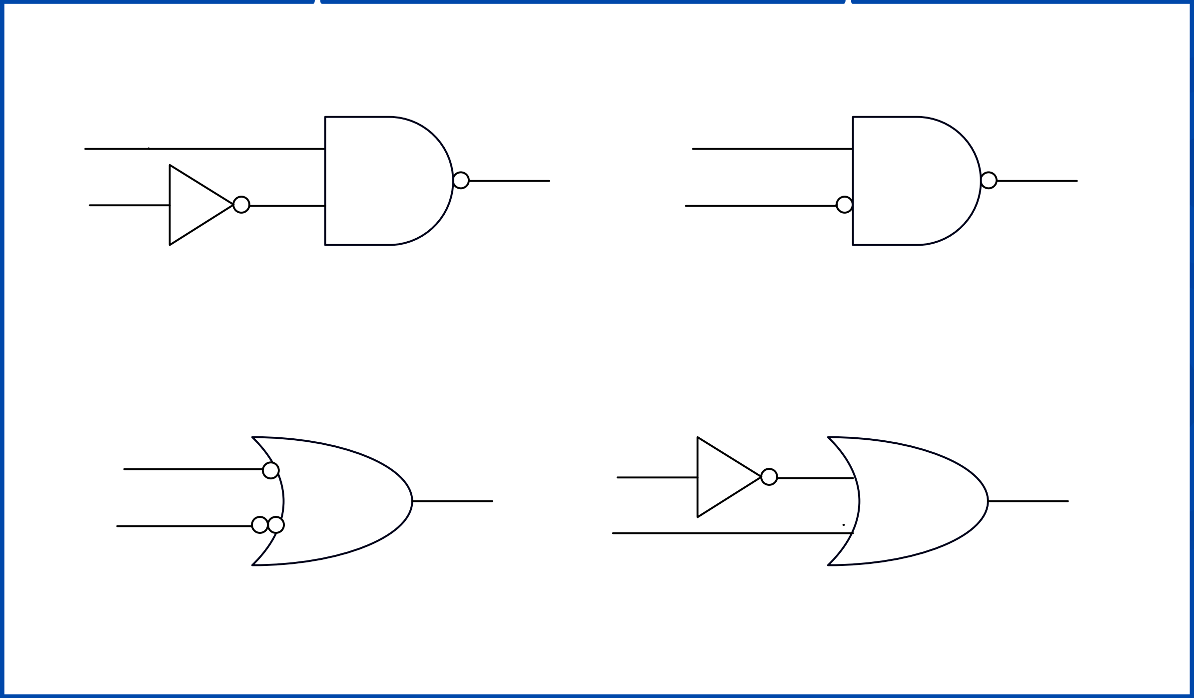
(ognuno dei fattori si chiama *maxterm*)

X Y Z	L
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

DeMorgan, “bolle”, logica negativa…

- Le “bolle” si possono spostare lungo le linee, e mettere anche sugli inputs.
- Due “bolle” si elidono
- Una bolla su ciascun input equivale a una singola bolla sull’output, scambiando il simbolo AND con OR, e viceversa.
- Una bolla si puo’ anche interpretare come indicatore di “logica negativa”

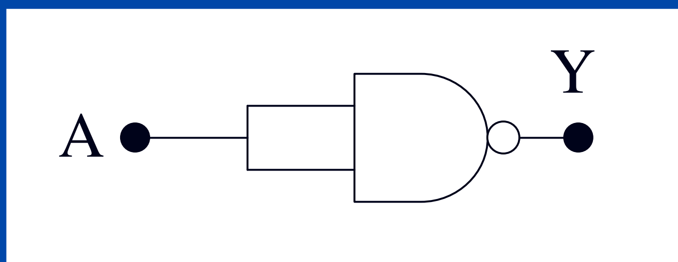
Esempio trasformazioni equivalenti



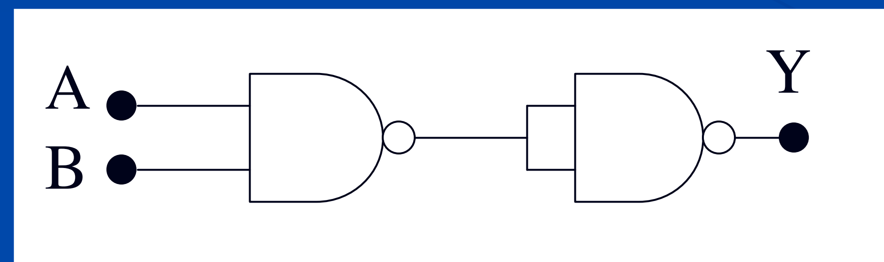
Porte logiche universali

- Abbiamo visto che qualunque funzione logica si puo’ costruire a partire usando soltanto le porte NOT, OR, AND
- Si puo’ ridurre ulteriormente la lista delle porte fondamentali ?

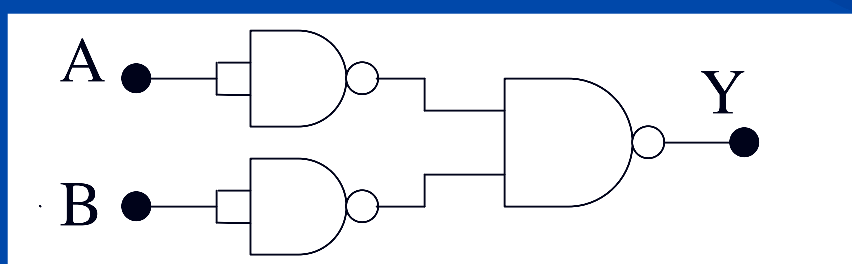
Equivalente NOT



Equivalente AND



Equivalente OR



Ogni funzione logica si puo’ costruire con sole porte NAND (porta universale)

Esercizi

1. Quante distinte funzioni logiche esistono che hanno N_I inputs e 1 output ?
2. Quante distinte funzioni logiche esistono che hanno N_I inputs e N_O output ?
3. Esistono funzioni logiche non banali con 2 inputs e 1 output, diverse da quelle descritte ?
4. Oltre al NAND, esistono altre porte universali ?
5. Disegnare tutte le funzioni non banali di 2 input usando il minor numero possibile di porte NAND