Argomento 12 - Esercizi

ESERCIZIO 12.1) Dati i vettori (con le componenti allineate in colonna)

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calcolare:

a) $3\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + 2\mathbf{v_3}$; **b)** $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} + \sqrt{2}\mathbf{v_4}$; **c)** $\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_3} - \mathbf{v_4}$;

d) $\mathbf{v_1} \bullet \mathbf{v_2}$; **e)** $\mathbf{v_1} \bullet \mathbf{v_3}$; **f)** $\mathbf{v_3} \bullet \mathbf{v_4}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.2) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

calcolare, se possibile,

a) $A + B$; **b)** $C - D^T$; **c)** $A + A^T$; **d)** $B + C$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.3) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

calcolare

a) A^T; **b)** $A + B$; **c)** $A - 2B$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.4) Date le matrici e i vettori colonna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calcolare

$$\textbf{a)}\quad A\mathbf{v_1}; \qquad \textbf{b)}\quad A\mathbf{v_2}; \qquad \textbf{c)}\quad A\mathbf{v_3}; \qquad \textbf{d)}\quad B\mathbf{v_1}; \qquad \textbf{e)}\quad B\mathbf{v_2}; \qquad \textbf{f)}\quad B\mathbf{v_3}.$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.5) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolare

a) AB; **b)** BA; **c)** AC; **d)** BC; **e)** CD; **f)** DA; **g)** DB; **h)** DC.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.6) Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

determinare per quali valori del parametro reale a si ha:

a) $AB = BA$; **b)** $AC = CA$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.7) Date le matrici e il vettore colonna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

calcolare i prodotti: $A\mathbf{c}$ e AB.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.8) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, mostrare che vale la relazione

$$7A - A^2 = 14I$$

(dove $A^2 = AA$ e I è la matrice identica).

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.9) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare quali coppie di matrici diverse possono essere moltiplicate tra loro ed eseguire le moltiplicazioni.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.10) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

a) Calcolare le matrici: $A + B$, AB e BA;
b) Verificare che: $\det(A + B) \neq \det A + \det B$;
c) Vericare che: $\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.11) Calcolare il determinante delle seguenti matrici.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, **b)** $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, **c)** $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, **e)** $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, **f)** $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.12) Determinare per quali valori del parametro reale k si ha $\det A = 0$, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 \\ 4 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.13) Date le matrici

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, **b)** $B = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix}$, **d)** $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$,

calcolarne, se possibile, le inverse.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.14) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

a) Calcolare i complementi algebrici di tutti gli elementi di A;
b) Scrivere A^{-1}.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.15) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

è invertibile e calcolarne l'inversa.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.16) Determinare la caratteristica delle matrici

$$\textbf{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{c)}\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{d)}\quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.17) Determinare la caratteristica delle matrici

$$\textbf{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 12.18) Determinare, al variare del parametro reale k, la caratteristica delle matrici

$$\textbf{a)}\quad A = \begin{pmatrix} k & 0 & 8k-8 \\ 2 & k & k \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k & -2-k \\ 1 & 2 & k^3 & k \\ 0 & k-2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Argomento *Suggerimento* *Soluzione*

ESERCIZIO 12.19) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} k & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ k & 3 & 3 \end{pmatrix}$,

A) se $k \neq 6$, allora $\det A \neq 0$;	**B)** se $k = 6$, allora $\mathrm{Car}\ A = 2$;
C) se $k \neq -6$, allora $\mathrm{Car}\ A \neq 3$;	**D)** se $k = -6$, allora $\det A = 0$.

Argomento *Soluzione*

ESERCIZIO 12.20) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}$, ha caratteristica 3

A) per ogni valore di k;	**B)** per nessun valore di k;
C) per un solo valore di k;	**D)** per ogni valore di k tranne uno.

Argomento *Soluzione*