Maturità 2018
Seconda Prova
Tema di Matematica
Quesiti 6 - 10

copyright
all rights reserved

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO
ALMA UNIVERSITAS TAURINENSIS

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO

Questi files sono stati predisposti dai formatori dell'Università di Torino nell'ambito del Progetto *Problem Posing and Solving*, PP&S, della Direzione Generale degli Ordinamenti Scolastici e dell'Autonomia Scolastica del MIUR. E' consentito l'utilizzo di questi files solamente a scopo di formazione nell'ambito del Progetto PP&S

Quesito 6

restart :

Testo:

Determinare l'equazione della superficie sferica S, con centro sulla retta

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \Re$$

tangente al piano $\pi : 3\,x - y - 2\,z + 14 = 0$ nel punto $T(-4, 0, 1)$.

Soluzione:

Nominiamo gli assi cartesiani:

_EnvXName :='x' : *_EnvYName* :='y' : *_EnvZName* :='z' :

Definiamo con i comandi del pacchetto geom3d la retta r, il punto T e il piano p dati dal problema.

geom3d:-*line*(r, $[t, t, t]$, t) :

geom3d:-*point*(T, $[-4, 0, 1]$) :

geom3d:-*plane*(p, $3\cdot x - y - 2\,z + 14 = 0$, $[x, y, z]$) :

Cerchiamo la retta perperndicolare al piano p passante per il punto T, dal momento che il centro della sfera si troverà su di essa:

geom3d:-*line*(rp, $[T, p]$, k) :

geom3d:- *Equation*(rp)

$$[-4 + 3\,k, -k, 1 - 2\,k] \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

Per trovare le esatte coordinate del centro intersechiamo la retta appena trovata con la retta r:

geom3d:-*intersection*(C, r, rp) :

Il punto di intersezione C, nonché il centro della sfera, avrà quindi coordinate:

$geom3d\text{:-}coordinates(C)$

$$[-1, -1, -1] \tag{1.2.2}$$

definiamo quindi la sfera dato il suo centro C e il piano di tangenza p e ricaviamo l'equazione della stessa.

$geom3d\text{:-}sphere(S, [C, p], 'centername' = C)$

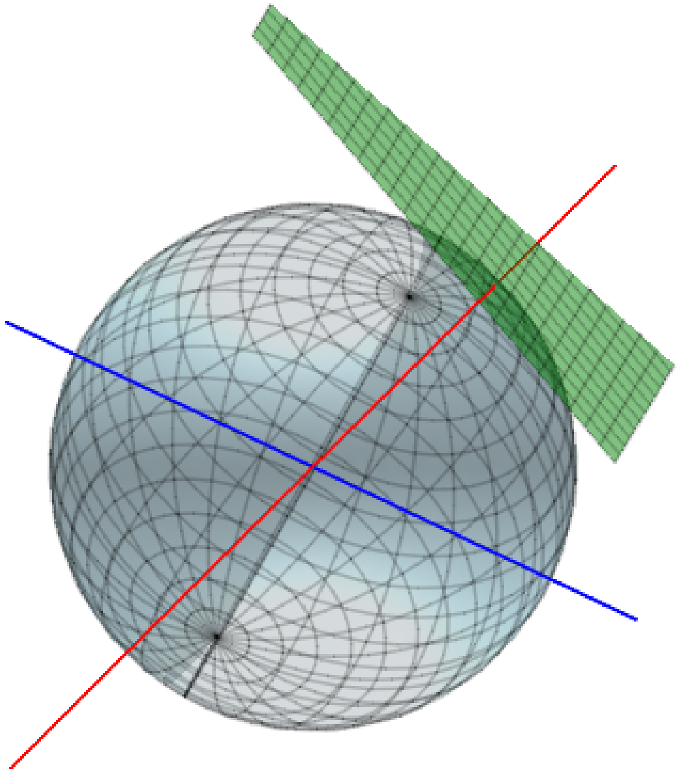
$$S \tag{1.2.3}$$

$geom3d\text{:-}Equation(S)$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,x + 2\,y + 2\,z - 11 = 0 \tag{1.2.4}$$

Rappresentiamo graficamente la situazione:

$plots\text{:-}display(\{geom3d\text{:-}draw([S, p], lightmodel = light2, color = [\text{"LightBlue"}, green], transparency = 0.5), geom3d\text{:-}draw([r, rp], lightmodel = light2, color = [blue, red], transparency = 0)\}, scaling = constrained, orientation = [40, 40, 30], style = patch, view = [-6..4, -6..4, -6..4])$



Quesito 7

restart :

Testo:

Determinare a in modo che

$$\int_a^{a+1} (3x^2+3)\,dx$$

sia uguale a 10.

Soluzione:

Possiamo calcolare il valore di a risolvendo l'equazione:

$$solve\left(\int_a^{a+1} (3x^2+3)\,dx = 10\right)$$

$$1, -2 \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

La concatenazione dei comandi precedente equivale a svolgere i seguenti passi:
Calcolare l'integrale con a generico:

$$\int_a^{a+1} (3x^2+3)\,dx$$

$$(a+1)^3 - a^3 + 3 \qquad \textbf{(2.2.2)}$$

Utilizziamo il comando simplify per semplificare il risultato ottenuto:
$simplify(\textbf{(2.2.2)})$

$$3a^2 + 3a + 4 \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

calcoliamo per quali valori di a l'espressione è uguale a 10 con il comando solve:
$solve(\textbf{(2.2.3)} = 10)$

$$1, -2 \qquad \textbf{(2.2.4)}$$

Quindi abbiamo che i valori di a cercati sono 1 e -2.

Verifichiamolo:

$$\int_{-2}^{-1} (3x^2+3)\,dx$$

$$10 \qquad \textbf{(2.2.5)}$$

$$\int_1^2 (3x^2+3)\,dx$$

$$10 \qquad \textbf{(2.2.6)}$$

Quesito 8

$restart:$

Testo:

In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

Soluzione:

Per la natura del gioco, affinché ci sia un vincitore sono necessarie almeno 10 partite. Per calcolare la probabilità richiesta possiamo calcolare separatamente le probilità che il gioco finisca

in 10, 11 o 12 partite.
La probabilità che uno dei due giocatori (l'uno o l'altro) vinca in 10 partite é:

$$P_{10} := \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$\frac{1}{512} \tag{3.2.1}$$

Per calcolare la probabilità che il gioco termini dopo 11 partite, dobbiamo tener conto del fatto che un giocatore ha vinto 9 partite delle prime 10. Se indichiamo con V la vittoria e con S la sconfitta, e tralasciamo per un momento l'undicesima partita, possiamo schematizzare come segue:
• Persa la prima partita: (S, V, V, V, V, V, V, V, V, V)
• Persa la seconda partita: (V, S, V, V, V, V, V, V, V, V)
• ...
• Persa la decima partita: (V, V, V, V, V, V, V, V, V, S)
Quindi per le prime dieci partite dobbiamo considerare le permutazioni di 10 elementi di cui 9 si ripetono; pertanto la probabilità che il gico si concluda dopo 11 partite è:

$$P_{11} := 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \cdot \frac{10!}{9! \cdot 1!}$$

$$\frac{5}{512} \tag{3.2.2}$$

Con un ragionamento analogo al punto precedente, possiamo calcolare la probabilità che la partita termini dopo 12 partite come:

$$P_{12} := 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot \frac{11!}{9! \cdot 2!}$$

$$\frac{55}{2048} \tag{3.2.3}$$

La probabilità richiesta sarà quindi la somma delle tre probabilità appena calcolate, pertanto:
$P = P_{10} + P_{11} + P_{12}$

$$P = \frac{79}{2048} \tag{3.2.4}$$

Quesito 9

restart :

Testo:

Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $A(3, 1, 0)$, $B(3, -1, 2)$, $C(1,1,2)$. Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x + y + z - 4 = 0$, stabilire quali sono i punti P tali che ABCP sia un tetraedro regolare.

Soluzione:

Definiamo i nomi degli assi sui quali vogliamo lavorare e i tre punti assegnati dal problema:
_EnvXName :='x' : *_EnvYName* :='y' : *_EnvZName* :='z' :
geom3d:-point(*A*, [3, 1, 0]) :
geom3d:-point(*B*, [3, -1, 2]) :
geom3d:-point(*C*, [1, 1, 2]) :
Costruiamo il triangolo per i tre punti dati e controlliamo se è equilatero:
geom3d:-triangle(*T*, [*A*, *B*, *C*]) :

$geom3d{:-}IsEquilateral(T)$

$$true \tag{4.2.1}$$

Definiamo il piano dato dal problema e controlliamo se i tre punti appartengono a esso (se il risultato è vero per tutti e tre i controlli, allora il triangolo appartiene al piano)

$geom3d{:-}plane(p, x+y+z-4=0):$

$geom3d{:-}IsOnObject(A, p);\ geom3d{:-}IsOnObject(B, p);\ geom3d{:-}IsOnObject(C, p)$

$$true$$

$$true$$

$$true \tag{4.2.2}$$

Definiamo un generico punto P e per trovare il tetraedro imponiamo che tutte le distanze del punto P dai tre vertici del triangolo siano uguali al lato del triangolo (calcolato ad esempio come la distanza tra A e B)

$geom3d{:-}point(P, [a, b, c]):$

$geom3d{:-}distance(A, B)$

$$2\sqrt{2} \tag{4.2.3}$$

$solve\left([geom3d{:-}distance(A, P)=2\sqrt{2}, geom3d{:-}distance(B, P)=2\sqrt{2}, geom3d{:-}distance(C, P)=2\sqrt{2}]\right)$

$$\{a=1, b=-1, c=0\}, \left\{a=\frac{11}{3}, b=\frac{5}{3}, c=\frac{8}{3}\right\} \tag{4.2.4}$$

Abbiamo ottenuto due punti P che possono essere considerati per la costruzione del tetraedro. Definiamo i due punti, definiamo i 2 tetraedri con i quattro vertici (A, B, C, P1 e A, B, C, P2) e rappresentiamoli insieme al piano p.

$geom3d{:-}point(P1, [1, -1, 0])$

$$P1 \tag{4.2.5}$$

$geom3d{:-}point\left(P2, \left[\frac{11}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right]\right)$

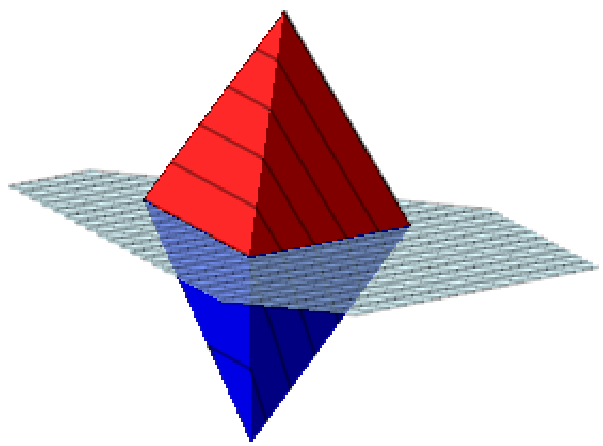
$$P2 \tag{4.2.6}$$

$g1 := geom3d{:-}draw(geom3d{:-}gtetrahedron(T1, [A, B, C, P1]), style=patchcontour, color=red):$

$g2 := geom3d{:-}draw(geom3d{:-}gtetrahedron(T2, [A, B, C, P2]), style=patchcontour, color=blue):$

$gp := geom3d{:-}draw(p, color=\text{"LightBlue"}, view=[-1..4, -2..3, -1..3], style=patch, transparency=0.4):$

$plots{:-}display(\{g1, g2, gp\}, orientation=[60, -35, -75])$



Quesito 10

restart :

Testo:

Determinare per quali valori del parametro $k \in \Re$ per cui la funzione $y(x) = 2 \cdot e^{k \cdot x + 2}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 2\,y' - 3\,y = 0$

Soluzione:

Definiamo la funzione:

$y(x) := 2 \cdot e^{k \cdot x + 2}$

$$x \rightarrow 2\, e^{k x + 2} \qquad \textbf{(5.2.1)}$$

Poichè questa è soluzione dell'equazione differenziale assegnata, ci bastera sostituire in quest'ultima le espressioni della derivata prima e seconda e risolvere per quali valori di k l'quazione è verificata.
Abbiamo allora che:

$$\frac{d^2}{dx^2}\, y(x) - 2\cdot\frac{d}{dx}\, y(x) - 3\cdot y(x) = 0$$

$$2\,k^2\,e^{kx+2} - 4\,k\,e^{kx+2} - 6\,e^{kx+2} = 0 \qquad \textbf{(5.2.2)}$$

Semplifichiamo l'espressione precedente e risolviamola rispetto al parametro k:

simplify(**(5.2.2)**)

$$2\,e^{kx+2}\left(k^2 - 2\,k - 3\right) = 0 \qquad \textbf{(5.2.3)}$$

solve(**(5.2.3)**, $\{k\}$)

$$\{k=3\},\ \{k=-1\} \qquad \textbf{(5.2.4)}$$