Maturità 2018
Seconda Prova
Tema di Matematica
Problema 1

Devi programmare il funzionamento di una macchina che viene adoperata nella produzione industriale di mattonelle per pavimenti. Le mattonelle sono di forma quadrata di lato 1 (in un'opportuna unità di misura) e le fasi di lavoro sono le seguenti:

- si sceglie una funzione $y=f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[0, 1]$, che soddisfi le condizioni:

a) $f(0)=1$;
b) $f(1)=0$;
c) $0<f(x)<1$ per $0<x<1$.

- La macchina traccia il grafico Γ della funzione $y=f(x)$ e i grafici simmetrici di Γ rispetto all'asse y, all'asse x e all'origine O, ottenendo in questo modo una curva chiusa Λ, passante per i punti $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0,-1)$, simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine, contenuta nel quadrato Q di vertici $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$.

- La macchina costruisce la mattonella colorando di grigio l'interno della curva chiusa Λ e lasciando bianca la parte restante del quadrato Q; vengono quindi mostrate sul display alcune mattonelle affiancate, per dare un'idea dell'aspetto del pavimento.

Il manuale d'uso riporta un esempio del processo realizzativo di una mattonella semplice:

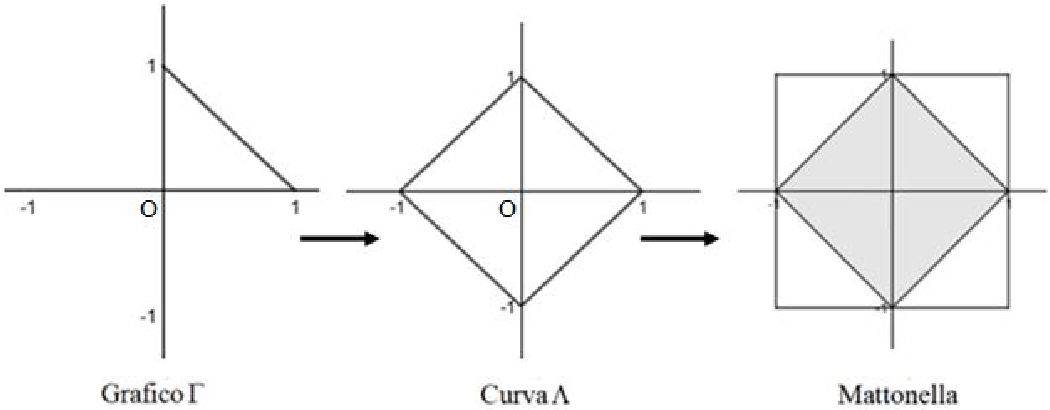


Figura 1

La pavimentazione risultante è riportata di seguito:

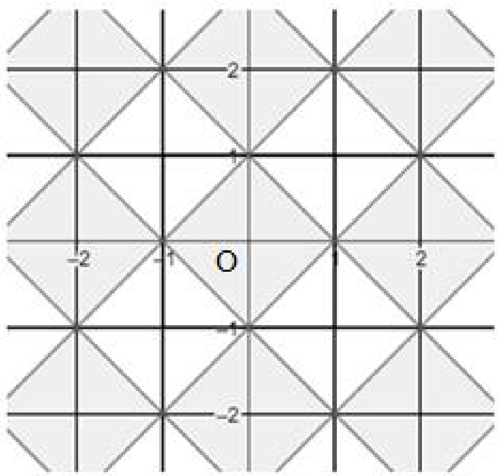


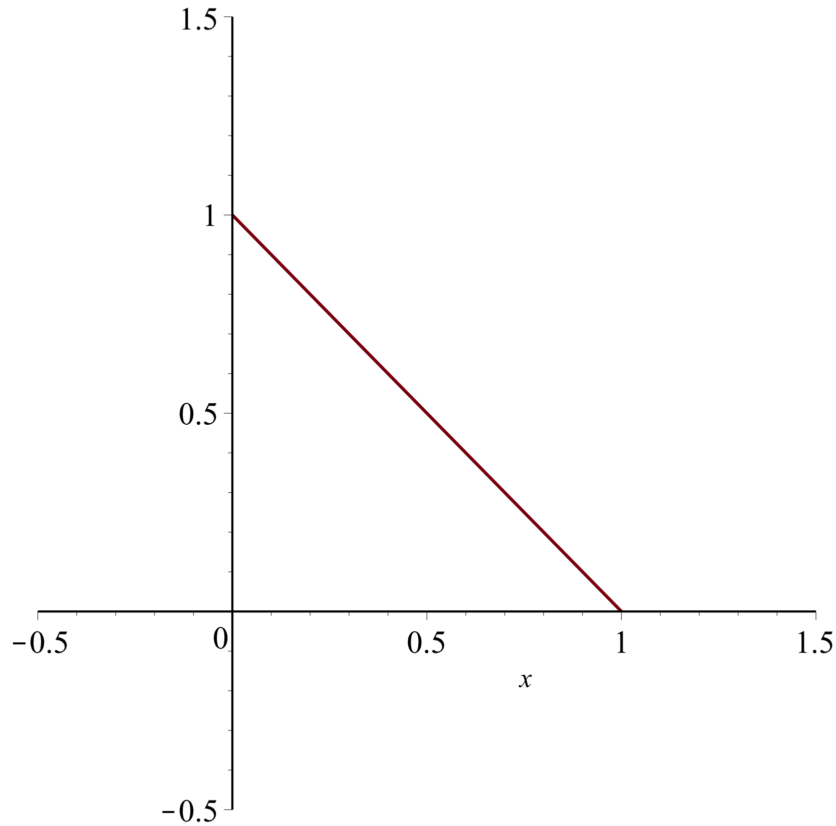
Figura 2

1. Con riferimento all'esempio, determina l'espressione della funzione $y = f(x)$ e l'equazione della curva Λ, così da poter effettuare una prova e verificare il funzionamento della macchina.

Soluzione

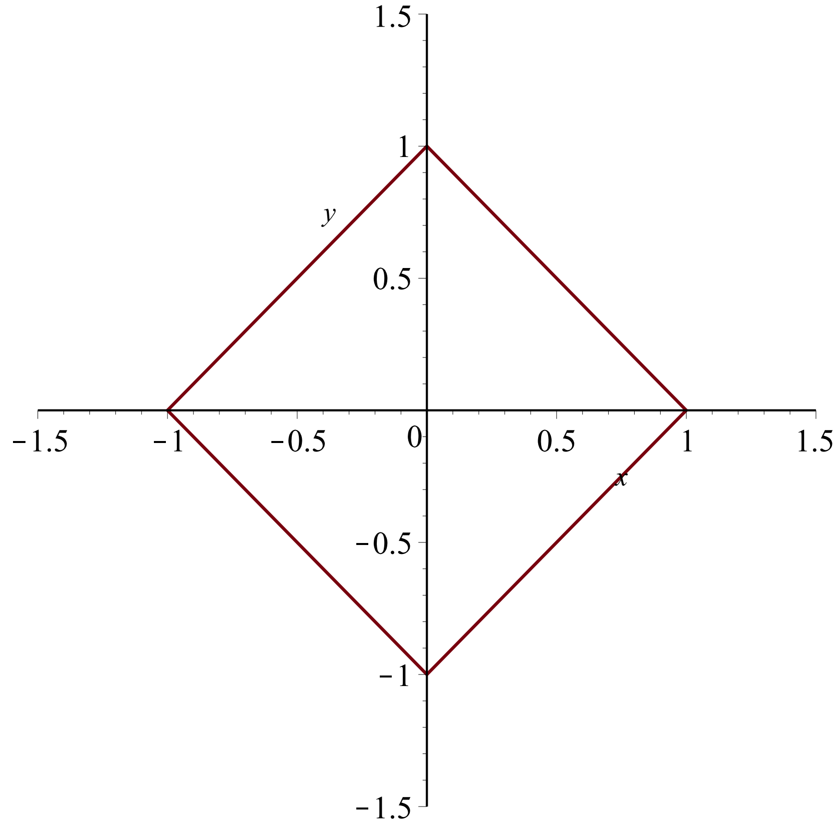
Nell'esempio in questione, la funzione è rappresentata graficamente dal segmento di estremi (1,0) e (0,1). Si può utilizzare l'espressione di una retta passante per due punti dati, ma viste le loro coordinate, è forse più facile osservare direttamente che i due punti sono accomunati dalla proprietà di possedere somma delle coordinate pari ad 1, pertanto la retta in questione è $x + y = 1$, ovvero $y = 1 - x$. Il seguente grafico mostra l'effettiva veridicità di tale osservazione:

```
> restart :
plot(1 − x, x = 0 ..1, view = [−0.5 ..1.5, −0.5 ..1.5])
```



Quanto alla curva Λ, essa si ottiene tracciando il grafico e ribaltandolo rispetto ad assi ed origine; algebricamente, questo consiste nel permettere ad x e y di avere segno non necessariamente positivo. Tale curva si può quindi rappresentare, facendo uso del valore assoluto, come $|x| + |y| = 1$, portando a quanto mostrato nel seguito:

```
> plots[implicitplot](abs(x) + abs(y) = 1, x =−1 ..1, y =−1 ..1, view = [−1.5 ..1.5, −1.5 ..1.5],
    gridrefine = 1)
```



Ti viene richiesto di costruire una mattonella con un disegno più elaborato che, oltre a rispettare le condizioni a), b) e c) descritte in precedenza, abbia $f'(0) = 0$ e l'area della parte colorata pari al 55% dell'area dell'intera mattonella. A tale scopo, prendi in considerazione funzioni polinomiali di secondo grado e di terzo grado.

2. Dopo aver verificato che non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado, determina i coefficienti reali a, b, c, d della funzione $f(x)$ polinomiale di terzo grado che soddisfa le condizioni poste. Rappresenta infine in un piano cartesiano la mattonella risultante.

Soluzione

Consideriamo un generico polinomio di secondo grado, della forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Per la condizione $f(0) = 1$, si ha immediatamente $c = 1$; poiché inoltre $f(1)=0$, abbiamo anche $a+b+c=0$, ovvero $a+b=-1$. D'altro canto $f'(x)=2\,ax+b$, da cui in particolare $f'(0)=b$; di conseguenza $b=0$, e pertanto $a=-1$. La parabola che soddisfa quindi le due condizioni di passaggio, e quella sulla derivata, è $y=1-x^2$; tuttavia, andando a calcolare l'area colorata (limitandosi a farlo per il primo quadrante, visto che stante la simmetria, le proporzioni restano le stesse), otteniamo:

```
> int(1 - x^2, x = 0..1)
```

$$\frac{2}{3} \tag{2.1}$$

Poiché l'area della parte di quadrato Q appartenente al primo quadrante è 1, il rapporto di proporzione è ancora $\frac{2}{3}$, diverso (in particolare superiore) rispetto al 55%.

Se invece consideriamo un generico polinomio di terzo grado, della forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, abbiamo un grado di libertà in più: in questo caso, dalla condizione $f(0)=1$ si ha $d=1$, e imponendo $f(1)=0$ otteniamo $a+b+c+d=0$, cioé $a+b+c=-1$; inoltre, per la derivata vale $f'(x)=3\,ax^2+2\,bx+c$, ovvero $f'(0)=c$, e pertanto $c=0$, da cui la condizione $a+b+c=-1$ si semplifica in $a+b=-1$. Una generica cubica che soddisfa le due condizioni di passaggio, e quella sulla derivata, ha quindi equazione $y=ax^3-(1+a)x^2+1$; integrando, si ottiene:

```
> int(a·x^3 - (1 + a)·x^2 + 1, x = 0..1)
```

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{12}\,a \tag{2.2}$$

Il valore di a per cui l'area della parte colorata è il 55% di quella dell'intera mattonella si calcola uguagliando l'espressione **(2.2)** a $\frac{55}{100}$:

```
> solve((2.2) = 55/100, a)
```

$$\frac{7}{5} \tag{2.3}$$

Dunque la funzione polinomiale di terzo grado che soddisfa le condizioni poste è $f(x)=\frac{7}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2+1$, e la mattonella si può disegnare come:

$> p1 := plot\left(\frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1, x = 0..1\right):$

$p2 := plot\left(-\frac{7}{5}x^3 + \frac{12}{5}x^2 - 1, x = 0..1\right):$

$p3 := plot\left(\frac{7}{5}(-x)^3 - \frac{12}{5}(-x)^2 + 1, x = -1..0\right):$

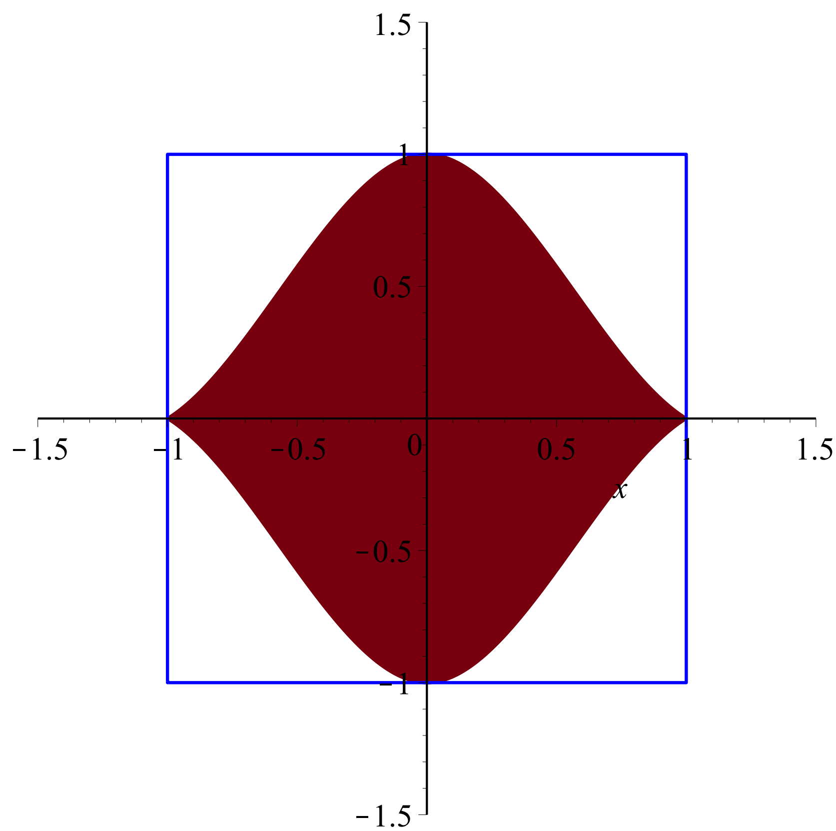
$p4 := plot\left(-\frac{7}{5}(-x)^3 + \frac{12}{5}(-x)^2 - 1, x = -1..0\right):$

$s1 := plots[shadebetween]\left(-\frac{7}{5}(-x)^3 + \frac{12}{5}(-x)^2 - 1, \frac{7}{5}(-x)^3 - \frac{12}{5}(-x)^2 + 1, x = -1..0\right):$

$s2 := plots[shadebetween]\left(-\frac{7}{5}x^3 + \frac{12}{5}x^2 - 1, \frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1, x = 0..1\right):$

$pq := plots[implicitplot](\max(\mathrm{abs}(x), \mathrm{abs}(y)) = 1, x = -1..1, y = -1..1, gridrefine = 4, color = blue):$

$plots[display](p1, p2, p3, p4, s1, s2, pq, view = [-1.5..1.5, -1.5..1.5])$



Vengono proposti a un cliente due tipi diversi di disegno, derivanti rispettivamente dalle funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$ e $b_n(x) = (1 - x)^n$, considerate per $x \in [0, 1]$, con n intero positivo.

3. Verifica che al variare di n tutte queste funzioni rispettano le condizioni a), b) e c). Dette $A(n)$ e $B(n)$ le aree delle parti colorate delle mattonelle ottenute a partire da tali funzioni a_n e b_n, calcola $\lim_{n \to +\infty} A(n)$ e $\lim_{n \to +\infty} B(n)$ ed interpreta i risultati in termini geometrici.

Soluzione

Per verificare le condizioni a) e b), è sufficiente calcolare $a_n(0), a_n(1), b_n(0), b_n(1)$, osservando che l'indipendenza da n segue dal fatto che $0^n = 0$ e $1^n = 1$ per ogni n. Quanto alla condizione c), calcoliamo le derivate di $a_n(x)$ e $b_n(x)$:

```
> dan := simplify(diff(1 - x^n, x));
  dbn := simplify(diff((1 - x)^n, x));
```

$$dan := -x^{n-1}\, n$$

$$dbn := -(1 - x)^{n-1}\, n \qquad \textbf{(3.1)}$$

osservando come entrambe sono negative in $[0, 1]$, quindi $a_n(x)$ e $b_n(x)$ sono strettamente decrescenti nello stesso intervallo; ma allora per le condizioni a) e b), in $(0, 1)$ potranno assumere soltanto valori ancora in $(0, 1)$, che è proprio ciò che afferma la condizione c).

Per calcolare le aree delle parti colorate delle mattonelle ottenute a partire da tali funzioni, integriamo queste ultime in $[0, 1]$, moltiplicando poi i risultati per 4, in maniera tale da tenere conto dell'intera mattonella:

```
> assume(0 < n);
  An := 4 · int(1 - x^n, x = 0..1);
  Bn := 4 · int((1 - x)^n, x = 0..1);
```

$$An := \frac{4\, n\sim}{n\sim + 1}$$

$$Bn := \frac{4}{n\sim + 1} \qquad \textbf{(3.2)}$$

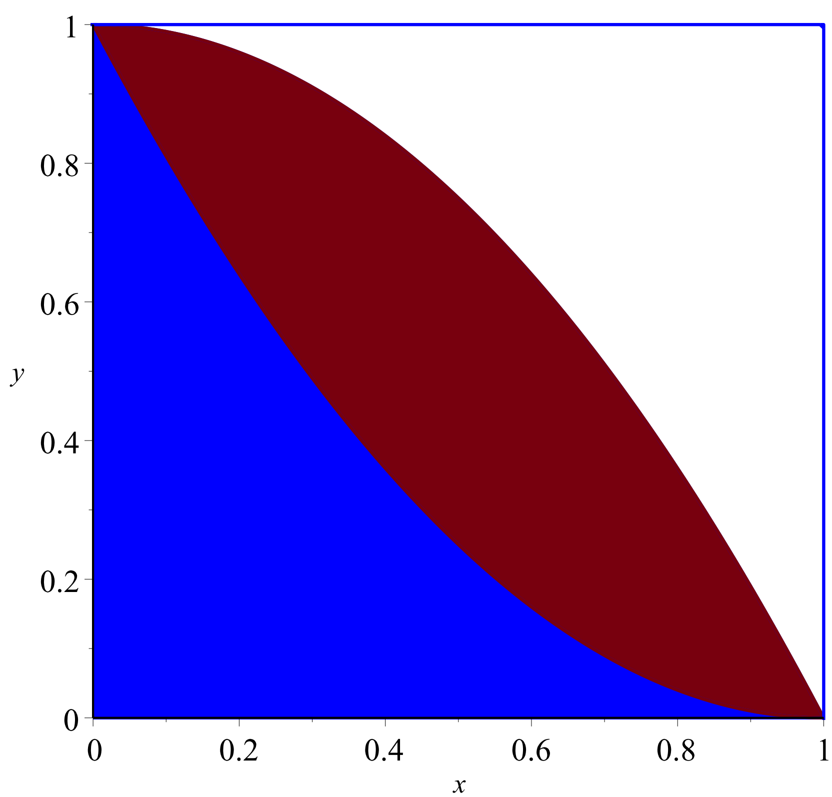
Si osserva facilmente che $\lim_{n \to +\infty} A(n) = 4$, mentre $\lim_{n \to +\infty} B(n) = 0$; geometricamente, questo significa che, all'aumentare di n, utilizzando le funzioni

$a_n(x)$, la parte colorata tende a riempire sempre più la mattonella, in maniera tale da poter rendere quella non colorata piccola a piacere, mentre facendo uso delle funzioni $b_n(x)$, è la parte colorata a poter essere resa piccola a piacere.

Un grafico animato può mostrare la situazione per quanto riguarda il primo quadrante: la parte colorata in blu, che si rimpicciolisce all'aumentare di n, è quella relativa alle funzioni $b_n(x)$, mentre relativamente alle funzioni $a_n(x)$, l'unione della parte colorata in blu con quella colorata in rosso mostra il progressivo ingrandimento di questo caso, sempre al crescere di n:

$> p5 := plots[animate](plot, [1 - x^n, x = 0..1, color = blue], n = 2..15, frames = 14) :$
$p6 := plots[animate](plot, [(1 - x)^n, x = 0..1], n = 2..15, frames = 14) :$
$s3 := plots[animate](plots[shadebetween], [0, (1 - x)^n, x = 0..1, color = blue], n = 2..15, frames = 14) :$
$s4 := plots[animate](plots[shadebetween], [(1 - x)^n, 1 - x^n, x = 0..1], n = 2..15, frames = 14) :$
$plots[display](p5, p6, s3, s4, pq, view = [0..1, 0..1])$

$n\sim = 2.$



Il cliente decide di ordinare 5.000 mattonelle con il disegno derivato da $a_2(x)$ e 5.000 con quello derivato da $b_2(x)$. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale. A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10.000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.

4. Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.

Soluzione

Per simmetria possiamo ragionare nel primo quadrante. La diagonale collega i punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$; più vicina al primo ci sarà l'area colorata, dove quindi se cade la goccia non si ha alcuna conseguenza negativa, mentre più vicina al secondo si troverà ad essere la parte non colorata, dove l'eventuale caduta della goccia causa un danno alla mattonella.

Determiniamo ora nei due casi, quello relativo a $a_2(x)$, e quello riferito a $b_2(x)$, il punto di intersezione tra la diagonale e il grafico Γ; nel primo caso dobbiamo intersecare $y=x$ con $y=1-x^2$, ovvero risolvere $x=1-x^2$, mentre nel secondo intersechiamo $y=x$ con $y=(1-x)^2$, arrivando alla risoluzione di $x=(1-x)^2$. Ricordando che $0<x<1$, i calcoli e le relative approssimazioni numeriche (utili ad identificare l'appartenenza o meno all'intervallo suddetto) portano a:

```
> a2d := solve(x = 1 - x^2, x);
  b2d := solve(x = (1 - x)^2, x);
  a2d_num := evalf(a2d, 5);
  b2d_num := evalf(b2d, 5);
```

$$a2d := \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

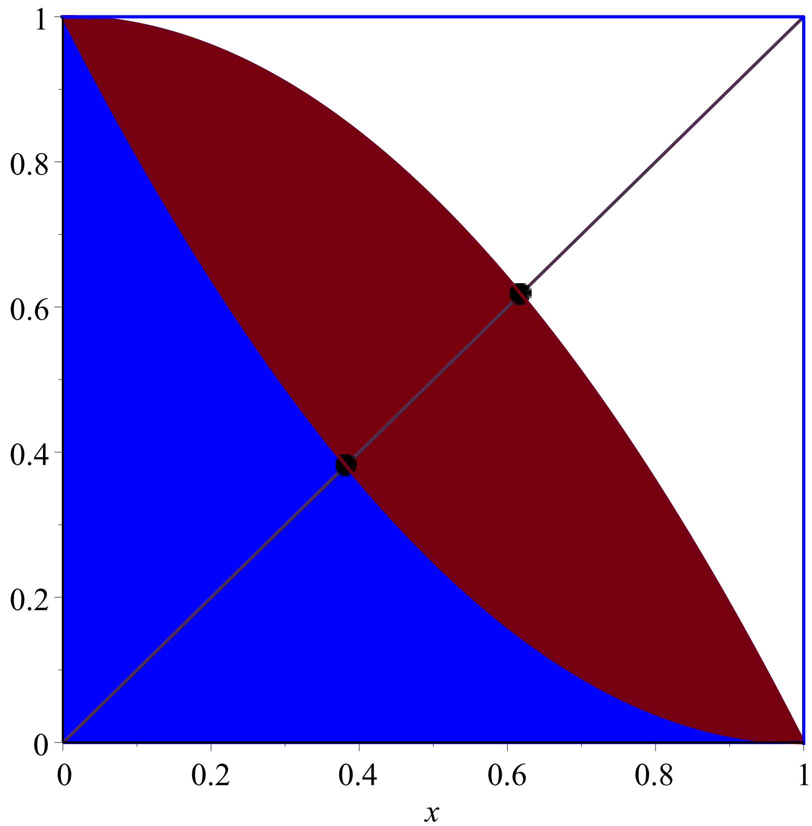
$$b2d := -\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$a2d\_num := 0.61800, -1.6180$$

$$b2d\_num := 0.3820, 2.6180 \qquad \textbf{(4.1)}$$

Riprendendo il grafico animato del punto precedente, fissiamo $n=2$ e disegniamo anche la diagonale:

```
> p7 := plot(1 - x^2, x = 0..1, color = blue) :
  p8 := plot((1 - x)^2, x = 0..1) :
  p9 := plot(x, x = 0..1, color = violet) :
  pp := plots[pointplot]([0.382, 0.618], [0.382, 0.618], symbol = solidcircle, symbolsize
        = 20) :
  s5 := plots[shadebetween](0, (1 - x)^2, x = 0..1, color = blue) :
  s6 := plots[shadebetween]((1 - x)^2, 1 - x^2, x = 0..1) :
  plots[display](p7, p8, p9, pp, s5, s6, pq, view = [0..1, 0..1])
```



Dunque, nel caso di $a_2(x)$, muovendosi sulla diagonale, tra i punti $(0, 0)$ e $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ si attraversa l'area già colorata, mentre tra i punti $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ e $(1, 1)$ si attraversa quella non colorata. Si ha quindi una probabilità di $1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ che, qualora la goccia cada, lo faccia causando un danno;

poiché però la goccia cade soltanto nel 20% dei casi, la probabilità effettiva del danno è $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3-\sqrt{5}}{10}$. Su 5.000 mattonelle, questo significa statisticamente $5000\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{10}=500\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)$ mattonelle danneggiate.

Nel caso di $b_2(x)$, invece, muovendosi sulla diagonale, tra i punti $(0,0)$ e $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ si attraversa l'area già colorata, mentre tra i punti $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ e $(1,1)$ si attraversa quella non colorata. Si ha quindi una probabilità di $1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ che, qualora la goccia cada, lo faccia causando un danno; poiché però la goccia cade soltanto nel 20% dei casi, la probabilità effettiva del danno è $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{10}$. Su 5.000 mattonelle, questo significa statisticamente $5000\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{10}=500\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)$ mattonelle danneggiate.

In totale, sommando i risultati dei due casi, il numero di mattonelle che risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione, è stimabile in $500\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)+500\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)=500\cdot 2=1000$.