Maturità 2018
Seconda Prova
Tema di Matematica
Problema 2

Testo del problema

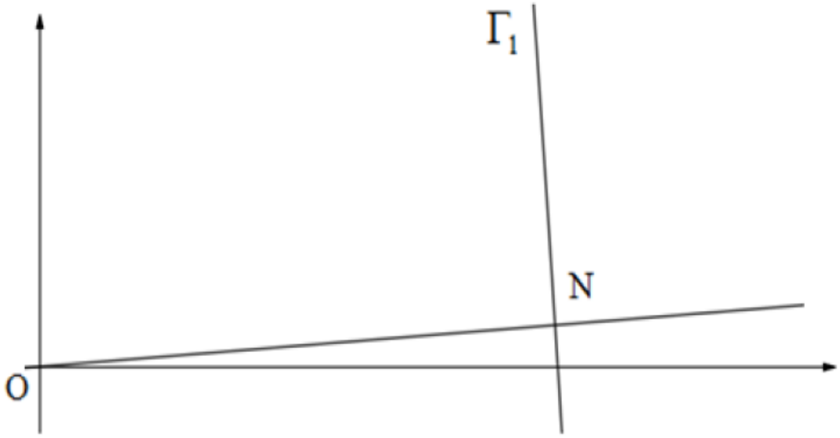
Consideriamo la funzione $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f_k(x) = -x^3 + k \cdot x + 9 \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

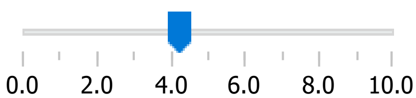
1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.

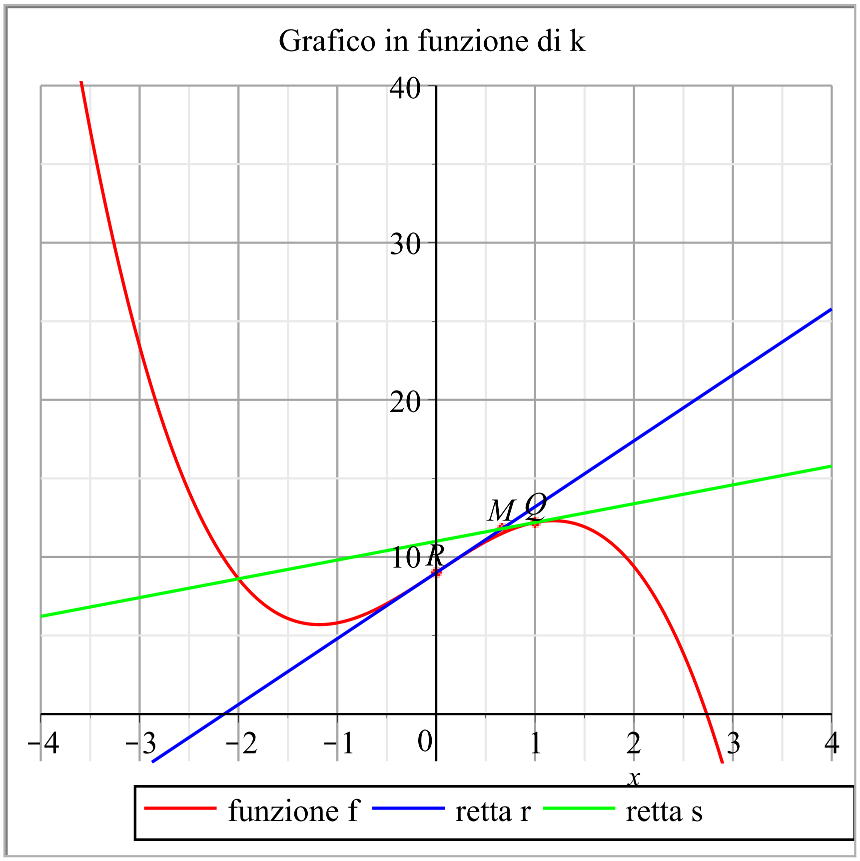
2. Dopo aver verificato che $k = 1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.

3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1 e s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto P (x_P, y_P) all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P).



4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1 . La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O . Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2\ n - 1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.

$k =$ 



Risoluzione

Punto 1.

Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1, si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.

Iniziamo aprendo il pacchetto *RealDomain* (infatti tutto il problema opererà unicamente su numeri Reali) e definendo la variabile fk assegnandole come valore la funzione:

$with(RealDomain)$:

$fk := -x^3 + k \cdot x + 9$

$$-x^3 + k\,x + 9 \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

Calcoliamo la sua derivata e assegnamole il nome dfk :

$diff\,(fk, x)$

$$-3\,x^2 + k \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

$dfk := -3\,x^2 + k$

$$-3\,x^2 + k \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

La retta r_k è tangente a Γ_k nel punto R di ascissa 0 ; la sua ordinata si può calcolare con:

$eval(fk, x = 0)$

$$9 \quad (2.1.4)$$

in quanto $y_R = f_k(0) = 9$.

Inoltre il coefficiente angolare m_r della retta r_k si può calcolare come derivata di $f_k(x)$ calcolata nel punto $x = 0$:

$eval(dfk, x = 0)$

$$k \quad (2.1.5)$$

quindi $m_r = f\,'_k(0) = k$.

Sapendo quindi che $R(0, 9) \in r_k$ e che $m_r = k$, posso applicare la seguente formula per calcolare l'equazione della retta $r_k : y = y_R + m_r \cdot (x - x_R)$.

$eval\left(y = y_R + m_r \cdot (x - x_R), [y_R = 9, m_r = k, x_R = 0]\right)$

$$y = k\,x + 9 \quad (2.1.6)$$

Operiamo in modo analogo per calcolare l'equazione di s_k .

La retta s_k è tangente a Γ_k nel punto Q di ascissa 1 ; la sua ordinata si può calcolare con:

$eval(fk, x = 1)$

$$k + 8 \quad (2.1.7)$$

in quanto $y_Q = f_k(1) = k + 8$.

Inoltre il coefficiente angolare m_s della retta s_k si può calcolare come derivata di $f_k(x)$ calcolata nel punto $x = 1$:

$eval(dfk, x = 1)$

$$k - 3 \quad (2.1.8)$$

quindi $m_s = f\,'_k(1) = k - 3$.

Sapendo quindi che $Q(1, k + 8) \in s_k$ e che $m_s = k - 3$, posso applicare la seguente formula per calcolare l'equazione della retta $s_k : y = y_Q + m_s \cdot (x - x_Q)$.

$eval\left(y = y_Q + m_s \cdot (x - x_Q), [y_Q = k + 8, m_s = k - 3, x_Q = 1]\right)$

$$y = k + 8 + (k - 3)\,(x - 1) \quad (2.1.9)$$

$simplify(\mathbf{(2.1.9)})$

$$y = k\,x - 3\,x + 11 \quad (2.1.10)$$

Abbiamo quindi ottenuto le equazioni delle due rette:

$r_k : y = k\,x + 9$

$s_k : y = (k - 3)\,x + 11$

Per calcolare il loro punti di intersezione M basta metterle a sistema:

$solve([y = k\,x + 9, y = (k - 3)\,x + 11], \{x, y\})$

$$\left\{x = \frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}\,k + 9\right\} \quad (2.1.11)$$

Si è quindi verificato che le coordinate del punto M di intersezione tra r_k e s_k avrà sempre coordinate $M\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \cdot k + 9\right)\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$.

Punto 2.

Dopo aver verificato che $k=1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.

Considero il punto $M\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\cdot k+9\right)$ $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, calcolato precedentemente.
Voglio verificare che $k=1$ quanto $y_M < 10$.
Impongo $y_M < 10$:
$solve\left(\frac{2}{3}\cdot k+9 < 10, \{k\}\right)$

$$\left\{k < \frac{3}{2}\right\} \tag{2.2.1}$$

Quindi affinchè valga $y_M < 10$ devo avere $k < \frac{3}{2}$ ma essendo $k \in \mathbb{Z}$ allora $k=1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, come volevasi dimostrare.

Considero quindi $k=1$ e ridefinisco la funzione e la sua derivata:
$f := eval(fk, k=1)$

$$-x^3+x+9 \tag{2.2.2}$$

$df := eval(dfk, k=1)$

$$-3x^2+1 \tag{2.2.3}$$

Il dominio della funzione $f_1(x)$ è tutto $\mathbb{R}$.
Calcoliamo quindi solo i limiti agli estremi del dominio:
$limit(f, x=\text{infinity})$

$$-\infty \tag{2.2.4}$$

$limit(f, x=-\text{infinity})$

$$\infty \tag{2.2.5}$$

Per x che tende ad infinito la funzione tenderà a meno infinito; al contrario, per x che tende a meno infinito la funzione tenderà a più infinito.

Si nota che la funzione non è nè pari nè dispari.

Calcoliamo le intersezioni con l'asse y (cosa che confermerà quanto visto in precedenza: la funzione passa per il punto $R(0, 9)$):
$solve([x=0, y=f], \{x, y\})$

$$\{x=0, y=9\} \tag{2.2.6}$$

e le intersezioni con l'asse x:
$solve([f=0], \{x\})$

$$\left\{x=\frac{1}{6}\left(972+12\sqrt{6549}\right)^{1/3}+\frac{2}{\left(972+12\sqrt{6549}\right)^{1/3}}\right\} \tag{2.2.7}$$

Chiamiamo c l'ascissa del punto $C(c, 0)$ di intersezione tra la funzione e l'asse delle x ($c \approx 2.24$).
$c := \frac{1}{6}\left(972+12\sqrt{6549}\right)^{1/3}+\frac{2}{\left(972+12\sqrt{6549}\right)^{1/3}}$

$$\frac{1}{6}\left(972+12\sqrt{6549}\right)^{1/3}+\frac{2}{\left(972+12\sqrt{6549}\right)^{1/3}} \tag{2.2.8}$$

evalf(c)

$$2.240040988 \tag{2.2.9}$$

Calcoliamo quindi la positività della funzione:
solve$([f>0], \{x\})$

$$\left\{x<\frac{1}{6}\,\frac{\left(972+12\sqrt{6549}\right)^{2/3}+12}{\left(972+12\sqrt{6549}\right)^{1/3}}\right\} \tag{2.2.10}$$

La mia funzione avrà valori positivi per $x<c$ e valori negativi per $x>c$.

Calcoliamo i punti stazionari:
solve$(df=0, \{x\})$

$$\left\{x=-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right\}, \left\{x=\frac{1}{3}\sqrt{3}\right\} \tag{2.2.11}$$

solve$(df>0, \{x\})$

$$\left\{x<\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}<x\right\} \tag{2.2.12}$$

Ovvero $-\frac{1}{3}\sqrt{3}<x<\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

eval$\left(f, x=\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$

$$\frac{2}{9}\sqrt{3}+9 \tag{2.2.13}$$

eval$\left(f, x=-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$

$$-\frac{2}{9}\sqrt{3}+9 \tag{2.2.14}$$

Abbiamo quindi trovato un punto di minimo in $F\left(.-\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{2}{9}\sqrt{3}+9\right)$ e un punto di massimo in $E\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3}+9\right)$.

Calcoliamo la derivata seconda *ddf*:
ddf := *diff*(df, x)

$$-6x \tag{2.2.15}$$

Calcoliamo i punti di flesso:
solve$(ddf=0, \{x\})$

$$\{x=0\} \tag{2.2.16}$$

solve$(ddf>0, \{x\})$

$$\{x<0\} \tag{2.2.17}$$

Abbiamo quindi trovato un solo punto di flesso, il punto $R(0, 9)$ che avevamo già definito in precedenza.
La funzione sarà convessa per $x<0$ e concava per $x>0$.

Comandi per disegnare il grafico

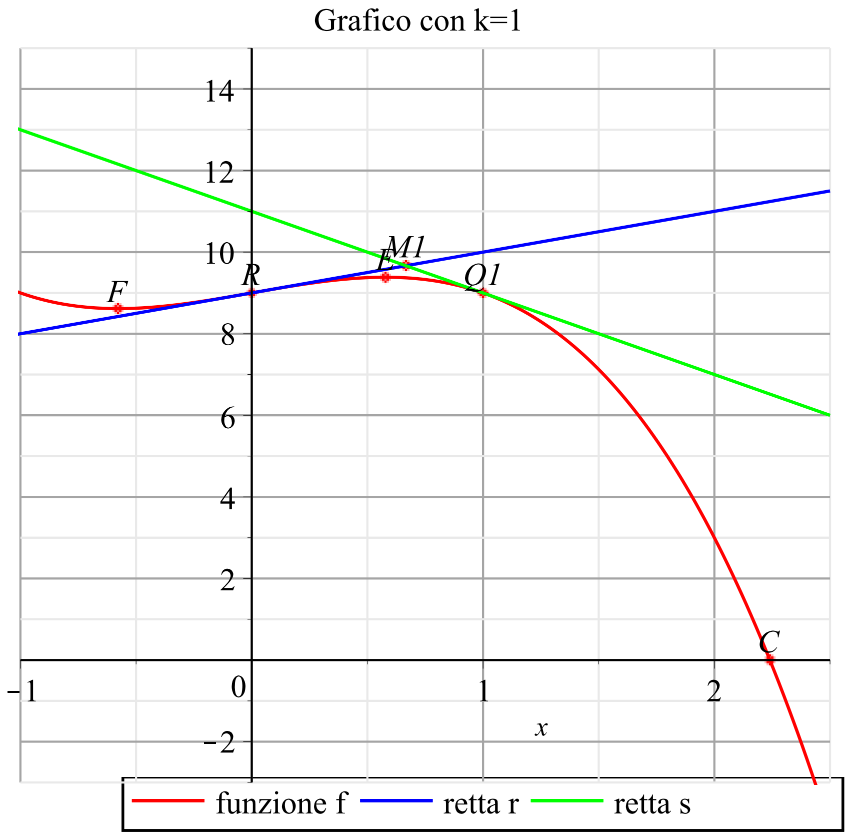
```
with(geometry) :
with(plots) :
Pl := plot([-x^3 + x + 9, x + 9, (1 - 3) * x + 11], x = -1.5 ..2.5, view = [-1 ..2.5, -3 ..15],
    color = [red, blue, green],
legend = ["funzione f", "retta r", "retta s"], gridlines = true, title = "Grafico con k=1") :
point(M1, 2/3, (2/3) + 9) :
point(R, 0, 9) :
point(Q1, 1, 1 + 8) :
point(C, c, 0) :
```

$point\left(F, -\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{2}{9}\sqrt{3}+9\right)$:

$point\left(E, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3}+9\right)$:

```
Dr := draw([M1, R, Q1, C, E, F], view = [-1 ..2.5, -3 ..15], scaling = unconstrained, axes
    = normal, printtext = true) :
```

```
display(Dr, Pl, view = [-1 ..2.5, -3 ..15])
```



Punto 3.

Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1 e s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto P (x_P, y_P) all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P).

Ricordiamo che precedentemente avevamo calcolato le equazioni delle rette r_k e s_k e il punto $M\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\cdot k+9\right)$:

$r_k : y = k\,x + 9$

$s_k : y = (k-3)\,x + 11$

Definisco quindi l'equazione delle rette r_1 e s_1 :

$r := eval(k\,x + 9, k = 1)$

$$x + 9 \tag{2.3.1}$$

$s := eval((k-3)\,x + 11, k = 1)$

$$-2\,x + 11 \tag{2.3.2}$$

Il punto di intersezione tra le rette r_1 e s_1 sarà $M1\left(\frac{2}{3}, \frac{29}{3}\right)$.

Calcoliamo il punto A di intersezione dalla retta r_1 e dall'asse delle ascisse:

$solve(r = 0, \{x\})$

$$\{x = -9\} \tag{2.3.3}$$

e il punto B di intersezione dalla retta s_1 e dall'asse delle ascisse:

$solve(s = 0, \{x\})$

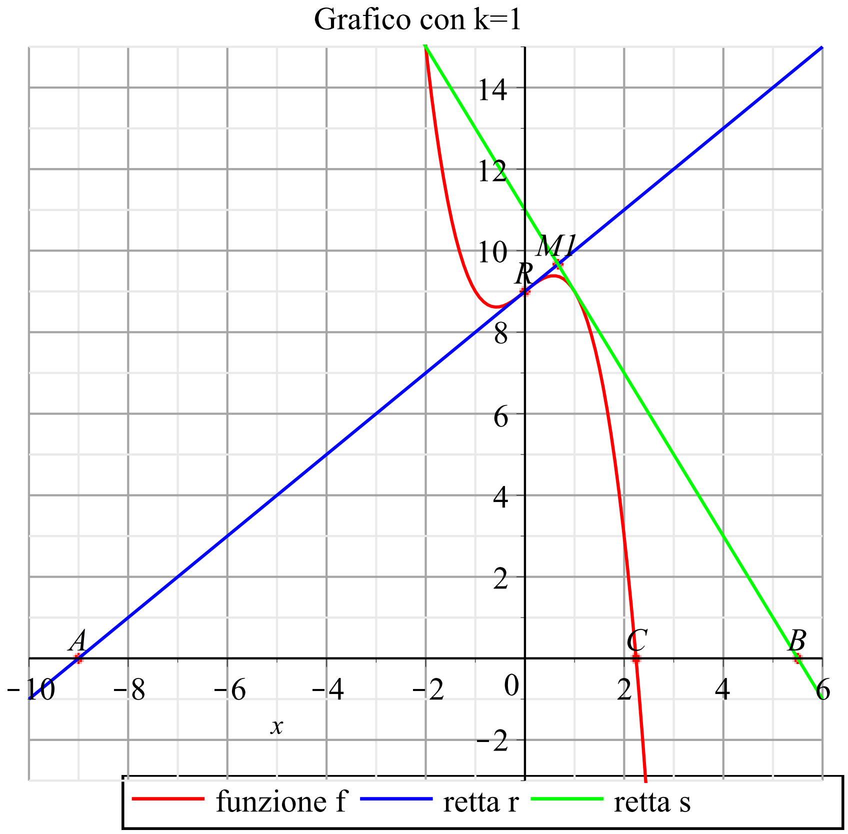
$$\left\{x = \frac{11}{2}\right\} \tag{2.3.4}$$

Abbiamo quindi trovato i punti $A(-9, 0)$ e $B\left(\frac{11}{2}, 0\right)$.

Comandi per disegnare il grafico

```
with(geometry) :
with(plots) :
PL := plot([-x^3 + x + 9, x + 9, (1 - 3) * x + 11], x = -10..6, view = [-10..6, -3..15],
    color = [red, blue, green],
legend = ["funzione f", "retta r", "retta s"], gridlines = true, title = "Grafico con k=1") :
point(M1, 2/3, (2/3) + 9) :
point(C, c, 0) :
point(A, -9, 0) :
point(B, 11/2, 0) :
point(R, 0, 9) :
DR := draw([M1, C, A, B, R], view = [-10..6, -3..15], scaling = unconstrained, axes
    = normal, printtext = true) :
```

```
display(DR, PL, view = [-10..6, -3..15])
```



La probabilità di scegliere un punto a caso $P(x_P, y_P)$ in una sezione del triangolo ABM è il rapporto tra l'area della sezione e l'area totale del triangolo, quindi:

$$probabilità = \frac{A_{sez}}{A_{ABM}}$$

dove
A_{ABM} è l'area totale di tutto il triangolo ABM e
A_{sez} è l'area all'interno del triangolo ABM, al di sopra di Γ_1 (cioè quei punti $P(x_P, y_P)$ tali che $y_P > f_1(x)$).

L'area del triangolo A_{ABM} è calcolabile tramite la formula dell'area del triangolo con altezza $y_M = \frac{29}{3}$ e base $|x_B - x_A| = \left|\frac{11}{2} - (-9)\right|$:

$solve\left(A = \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{3} \cdot \left(\frac{11}{2} - (-9)\right), A\right)$

$$\frac{841}{12}$$

$evalf(\textbf{(2.3.5)})$

$$70.08333333 \qquad \textbf{(2.3.6)}$$

Quindi $A_{ABM} = \dfrac{841}{12} \approx 70.08$.

L'area della sezione che ci interessa si può calcolare nel seguente modo:

$$A_{sez} = A_{ABM} - A_{AOR} - \int_0^c f \, dx$$

dove

A_{AOR} è l'area del triangolo AOR e

$\int_0^c f \, dx$ è l'area sottesa dalla funzione $f_1(x)$ tra 0 e il punto $C(c, 0)$ di interesezione tra la funzione e l'asse delle x.

L'area del triangolo A_{AOR} è calcolabile tramite la formula dell'area del triangolo con altezza $y_R = 9$ e base $|x_O - x_A| = |0 - (-9)|$:

$solve\left(A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9, A\right)$

$$\frac{81}{2} \tag{2.3.7}$$

$evalf(\textbf{(2.3.7)})$

$$40.50000000 \tag{2.3.8}$$

Quindi $A_{AOR} = \dfrac{81}{2}$.

Calcoliamo l'integrale:

$int(f, x = 0..c)$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\left(972 + 12\sqrt{6549}\right)^{1/3} + \frac{2}{\left(972 + 12\sqrt{6549}\right)^{1/3}}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\left(972 + 12\sqrt{6549}\right)^{1/3} + \frac{2}{\left(972 + 12\sqrt{6549}\right)^{1/3}}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(972 + 12\sqrt{6549}\right)^{1/3} + \frac{18}{\left(972 + 12\sqrt{6549}\right)^{1/3}} \tag{2.3.9}$$

$evalf(\textbf{(2.3.9)})$

$$16.37472256 \tag{2.3.10}$$

Quindi $\int_0^c f \, dx \approx 16.37$.

Possiamo infine calcolare la nostra probabilità:

$$probabilità = \frac{A_{sez}}{A_{ABM}} \approx \frac{A_{ABM} - A_{AOR} - \int_0^c f \, dx}{A_{ABM}} = \frac{\frac{841}{12} - \frac{81}{2} - 16.37}{\frac{841}{12}}$$

$$evalf\left(\frac{\frac{841}{12}-\frac{81}{2}-\textbf{(2.3.9)}}{\frac{841}{12}}\right)$$

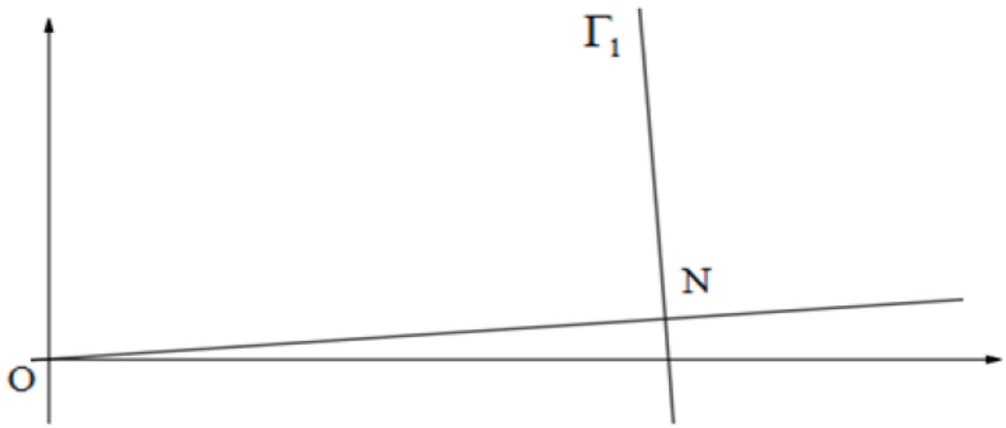
$$0.1884700704 \qquad \textbf{(2.3.11)}$$

In conclusione, la probabilità che, preso a caso un punto P (x_P, y_P) all'interno del triangolo ABM, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto P) è del 18% .

Punto 4.

Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1 . La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O . Il grafico Γ_1 possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n > 0$ non può possedere più di $2\,n-1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.

Consideriamo un punto N $\in$, dove Γ è il grafico di un polinomio qualsiasi di grado $n > 0$, definito dalla funzione $g(x)$.
Definisco la retta t, passante per l'orgine e normale a Γ in N; questa è quindi perpendicolare alla retta q, tangente a Γ in N.
La retta q ha come coefficiente angolare $m_q = g'(x_N)$; allora la retta t ha come coefficiente angolare: $m_t = \frac{-1}{g'(x_N)}$.
Posso quindi calcolare l'equazione della retta t di coefficiente angolare $m_t = \frac{-1}{g'(x_N)}$ e passante per il punto $N(x_N, g(x_N))$:
$y = g(x_N) + \frac{-1}{g'(x_N)} \cdot (x - x_N)$.
Impongo il passaggio della retta t per l'origine sostituendone le coordinate nell'equazione della retta: $0 = g(x_N) + \frac{-1}{g'(x_N)} \cdot (0 - x_N)$
e ottenendo: $x_N - g(x_N) \cdot g'(x_N) = 0$.
Considerando che g è un polinomio di grado n allora g' sarà di grado $n-1$; il polinomio $x_N - g(x_N) \cdot g'(x_N) = 0$ sarà quindi di grado $n + (n-1) = 2\,n-1$.
Per il teorema fondamentale dell'algebra, l'equazione $x_N - g(x_N) \cdot g'(x_N) = 0$ ha al più $2\,n-1$ soluzioni, ovvero non possono esistere più di $2\,n-1$ punti nei quali la retta normale passa al grafico passa per l'origine.



Γ_1
N
O