METODI NUMERICI DI SOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

METODI DIRETTI

▶ METODO DI GAUSS RIDUZIONE A SCALA CON MAPLE

▶ METODO DI GAUSS JORDAN CON MAPLE

METODI INDIRETTI

Sono metodi iterativi, adatti all'uso di computer, che consistono nella ricerca delle soluzioni del sistema attraverso approssimazioni successive

▼ METODO DI JACOBI

Il metodo di Jacobi o delle sostituzioni simultanee consiste nel ricavare ogni incognita da ogni equazione, sostituire alle incognite a secondo membro i valori iniziali $x_1=0$ $x_2= 0$ ecc....ricavare i nuovi valori delle incognite e ripetere l'iterazione
In questo modo ottengo una successione di dati per ogni incognita che converge alla soluzione corrispondente

Le difficoltà di applicazione del metodo di Jacobi non dipendono dal calcolo, ma dal determinare se la successione delle soluzioni approssimate converge o no
E' difficile dare delle **condizioni generali di convergenza,** ma si possono utilizzare alcune condizioni particolari:

- condizione necessaria per la convergenza è che tutti gli elementi della diagonale principale della matrice siano diversi da zero
- condizione sufficiente è che la matrice A sia una matrice a **predominanza diagonale**, cioè che gli elementi della diagonale principale siano maggiori in valore assoluto della somma degli altri elementi della riga corrispondente sempre presi in valore assoluto

Esempio

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$ è a predominanza diagonale perchè:

$|4| > |-2| + |1|$; $|5| > |2| + |0|$; $|-3| > |1| + |1$

E' interessante notare come a volte sia possibile, ordinando opportunamente le equazioni del sistema, trasformare un sistema in modo che sia soddisfatta la condizione della predominanza diagonale

METODO DI GAUSS SEIDEL

Il metodo di Gauss Seidel o delle sostituzioni successive è una variante del metodo di Jacobi.
Mentre nel metodo di Jacobi le sostituzioni si fanno simultaneamente in tutte le equazioni del sistema, nel metodo di Gauss Seidel esse si calcolano in un'equazione per volta, sfruttando così i risultati ottenuti dalle equazioni precedenti

In questo modo ottengo una successione di dati per ogni incognita che converge alla soluzione corrispondente

Il metodo di Gauss Seidel è in genere più veloce del metodo di Jacobi.

I criteri per fermare l'iterazione e le condizioni di convergenza sono simili a quelli usati per il metodo di Jacobi

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DI UN SISTEMA A DUE EQUAZIONI E DUE INCOGNITE

Considero il sistema

$$\begin{cases} 5x - 4y = 6 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

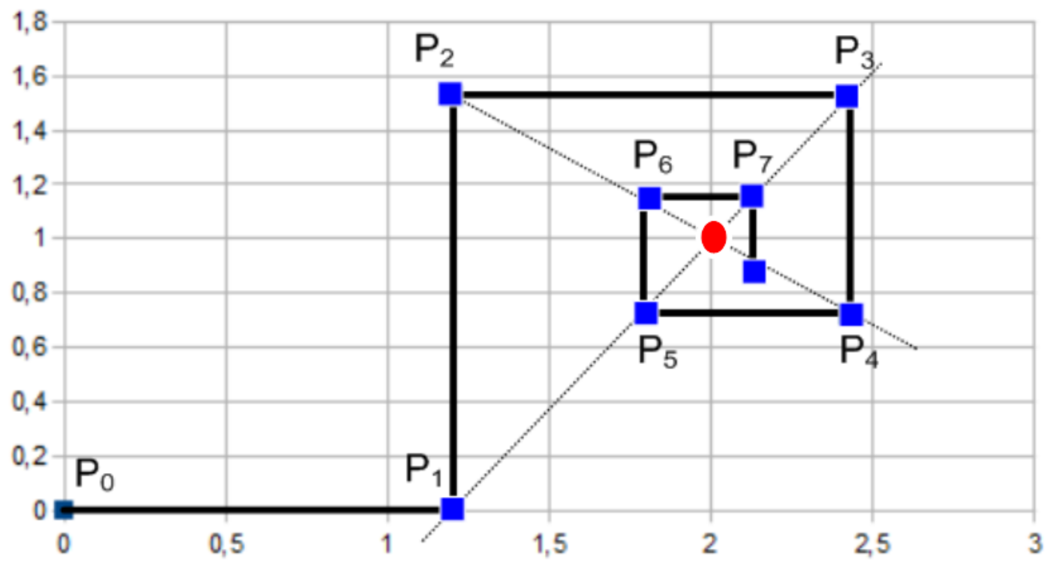
Le equazioni rappresentano due rette nel piano cartesiano e risolvere il sistema equivale a trovare le coordinate del loro punto d'intersezione.
Scrivendo il sistema nella forma

$$\begin{cases} x = \dfrac{6}{5} + \dfrac{4}{5}y \\ y = \dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

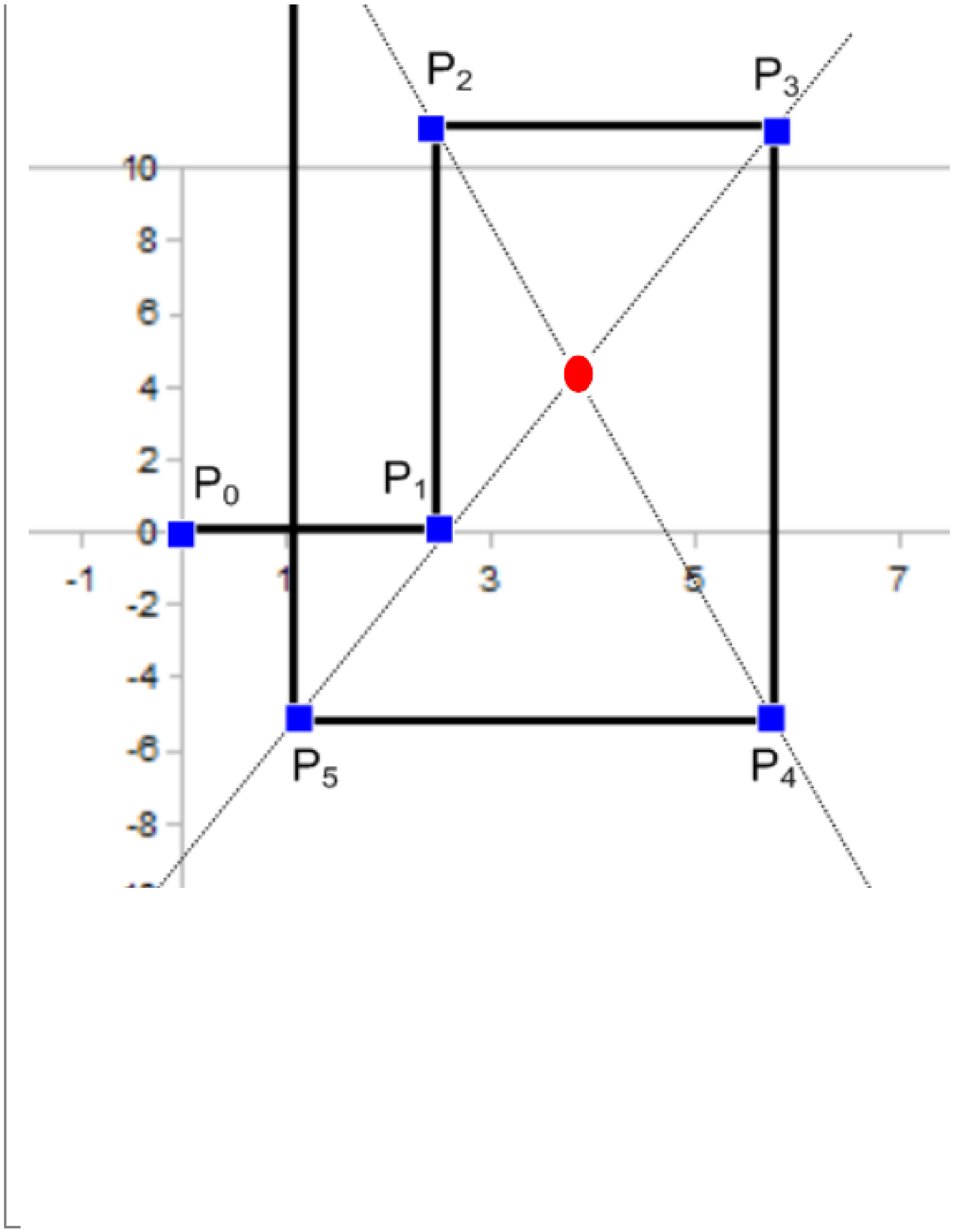
Considerando come punto iniziale il punto $P_0(0,0)$
Si sostituisce alla y il valore 0 nella prima equazione; si ha il valore x = 6/5. Il punto $P_1(6/5,0)$ è la prima approssimazione del risultato.
Si sostituisce il valore 6/5 alla x nella seconda equazione si ha

$P_2(6/5\ ,\ 23/15)$ e così via

Graficamente da ogni punto trovato si traccia alternativamente una parallela all'asse x o all'asse y fino a incontrare l'altra retta; il punto d'intersezione è il nuovo punto dell'iterazione.
Si ricava una successione di punti che, se il metodo converge, si avvicina sempre più al punto cercato.



Se la successione non converge avrò per esempio un grafico di questo tipo



In generale , per risolvere numericamente un sistema, i metodi iterativi sono più rapidi dei metodi diretti, e hanno un minor costo computazionale, cioè svolgono un numero minore di operazioni.
Inoltre essi sono meno sensibili agli errori di approssimazione.
Il limite dei metodi iterativi è la convergenza o meno del sistema; se il sistema non converge è necessario usare un metodo diretto