UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO
ALMA UNIVERSITAS TAURINENSIS

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GIUSEPPE PEANO
UNIVERSITÀ DI TORINO

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Tema di Matematica e Fisica

Sessione ordinaria 2019 - Seconda prova scritta

Problema 1

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = a \cdot x^2 - x + b \qquad g(x) = (a \cdot x + b) \cdot e^{2x - x^2}$$

1. Provare che comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2, 1)$.

Soluzione

Iniziamo assegnando alle funzioni f e g le espressioni in funzione di a e b.

$f(x) := a \cdot x^2 - x + b$

$$x \rightarrow a\, x^2 - x + b \tag{1.1}$$

$g(x) := (a \cdot x + b) \cdot \mathrm{e}^{2x - x^2}$

$$x \rightarrow (a\, x + b)\, \mathrm{e}^{2x - x^2} \tag{1.2}$$

Per rispondere alla prima domanda notiamo subito che la funzione g, essendo il prodotto tra una funzione esponenziale e una polinomiale, ha come dominio tutto $\mathbb{R}$, è continua sul suo dominio e derivabile per qualsiasi x.

Per determinare l'esistenza di punti di massimo o minimo occorre determinare la derivata prima della funzione:

$g_1 := diff(g(x), x)$

$$a\, \mathrm{e}^{-x^2 + 2x} + (a\, x + b)\, (-2\, x + 2)\, \mathrm{e}^{-x^2 + 2x} \tag{1.3}$$

Siccome il fattore esponenziale è sempre positivo, studiare il segno di g_1 equivale a studiare il segno della funzione polinomiale

$p := simplify\left(\frac{g_1}{e^{-x^2+2x}}\right)$

$$-2\,a\,x^2+2\,a\,x-2\,b\,x+a+2\,b \tag{1.4}$$

che ha discriminante:

$discrim(p, x)$

$$12\,a^2+8\,a\,b+4\,b^2 \tag{1.5}$$

che possiamo riscrivere nel seguente modo: $4\cdot\left(2\,a^2+(a+b)^2\right)$.
Quindi, siccome il discriminante è esprimibile coma somma di due quadrati, è necessariamente positivo. Quindi l'equazione associata ammette due soluzioni reali, che corrispondono alle ascisse dei punti di massimo e minimo della funzione g.
Per verificare che siano punti di massimo e minimo assoluti studiamo l'andamento della funzione agli estremi del dominio:

$limit(g(x), x=\mathrm{infinity})$

$$0 \tag{1.6}$$

$limit(g(x), x=-\mathrm{infinity})$

$$0 \tag{1.7}$$

L'asse x è quindi asintoto orizzontale della funzione g, che non può perciò tendere all'infinito per nessun valore di x. I due zeri della derivata prima sono quindi punti di massimo e minimo assoluti.

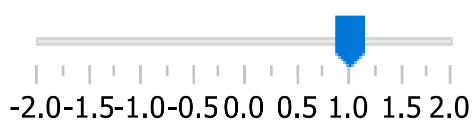
Per determinare i valori di a e b richiesti, imponiamo il passaggio delle due funzioni per il punto $A(2, 1)$ e mettiamo le due condizioni a sistema.

$solve(\{f(2)=1, g(2)=1\}, \{a, b\})$

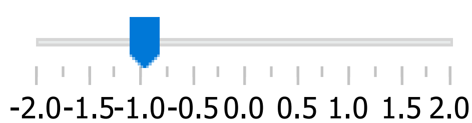
$$\{a=1, b=-1\} \tag{1.8}$$

I valori di a e b richiesti sono rispettivamente 1 e -1.

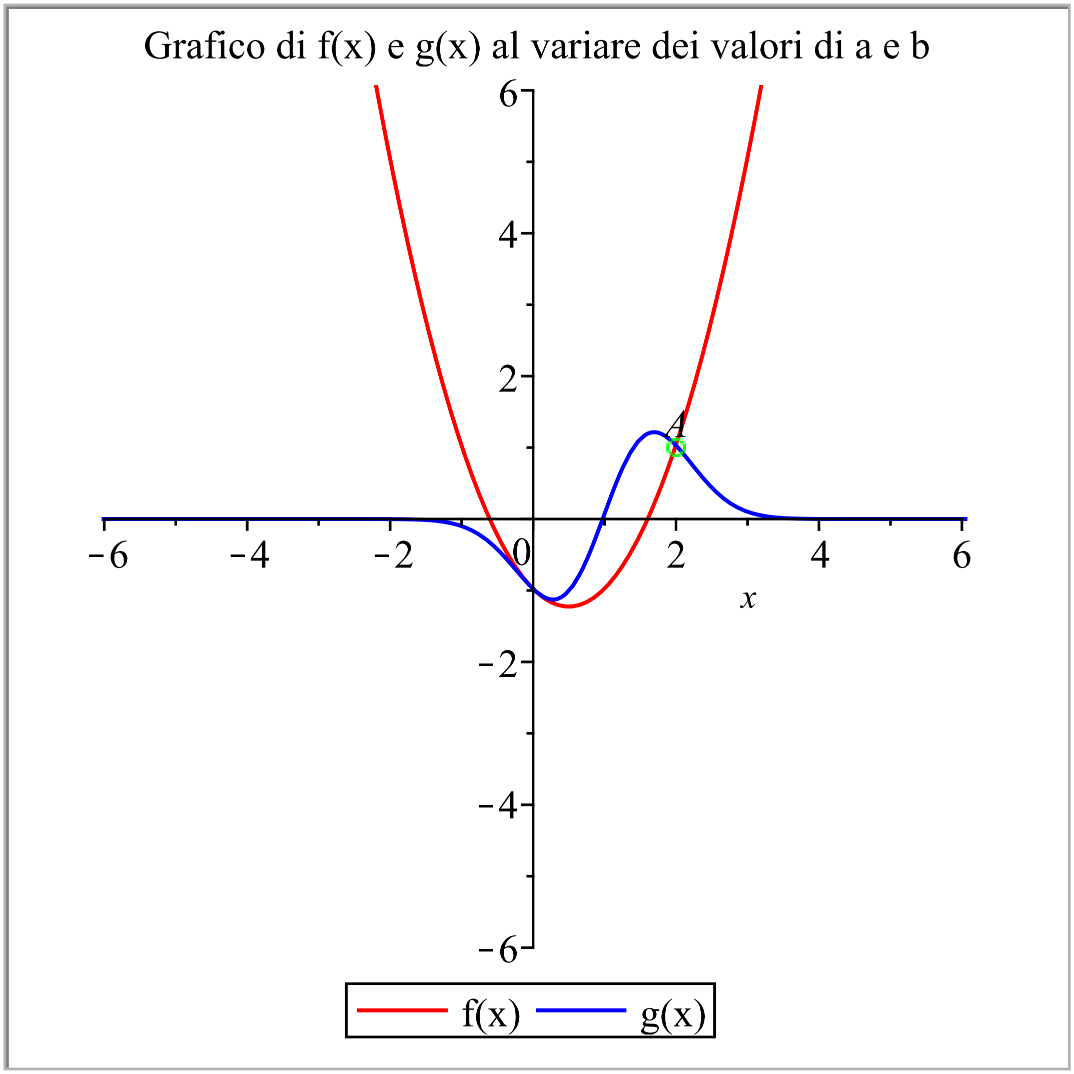
Utilizziamo ora una componente interattiva per rappresentare le due funzioni al variare dei parametri e vedere graficamente per quali valori di a e b i grafici di *f(x)* e *g(x)* si intersecano nel punto *A(2,1)* :

$a =$ 

1.0042194

$b =$ 

-.97727273



2. Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0, -1)$.
   Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g.

Soluzione

Assegnamo i valori che abbiamo trovato ai parametri a e b.

$a := 1$

$$1 \tag{2.1}$$

$b := -1$

$$-1 \tag{2.2}$$

Quindi la funzioni sono:

$f(x)$

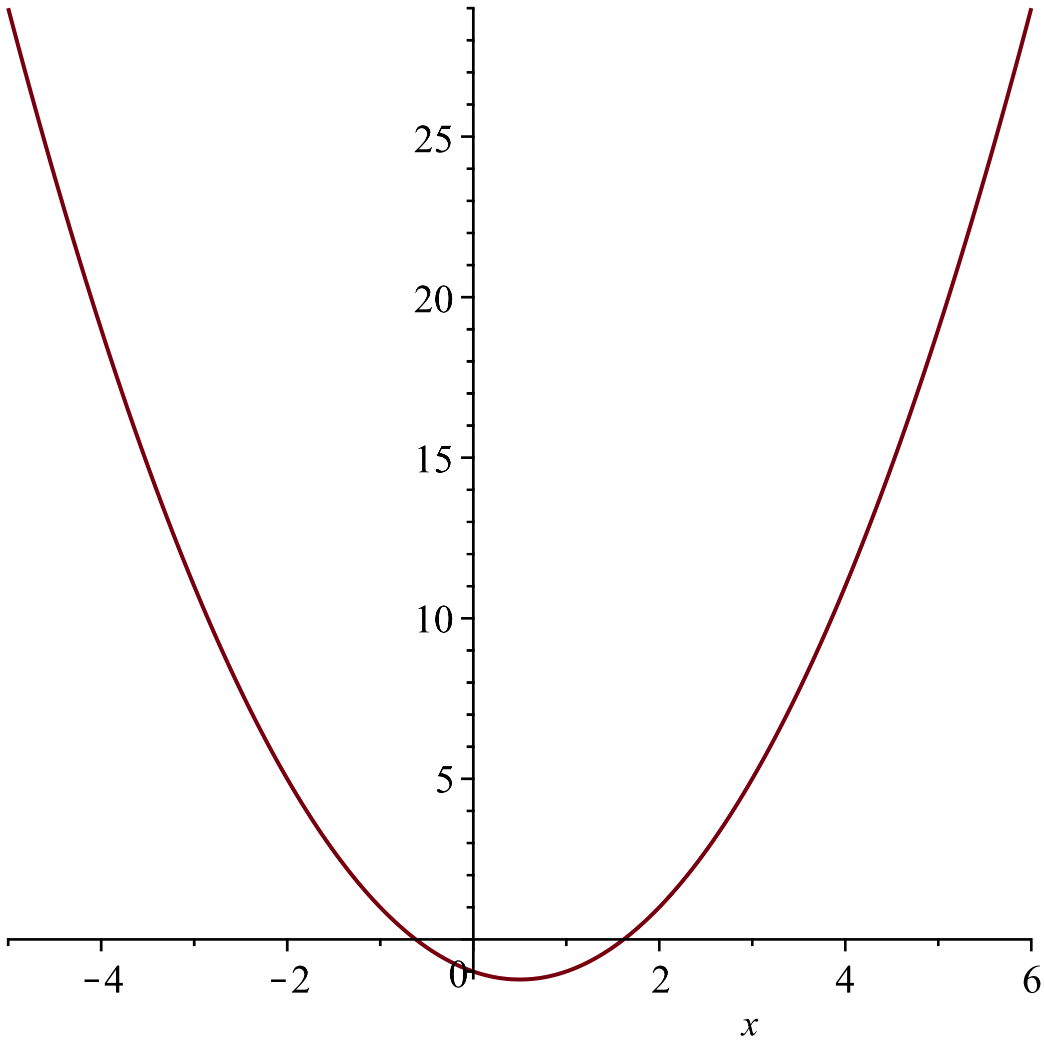
$$x^2 - x - 1 \tag{2.3}$$

$g(x)$

$$(x-1)\,e^{-x^2+2x} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Studiamo le due funzioni.

Disegnando la prima funzione nel piano si può vedere che è una parabola con concavità rivolta verso l'alto.



Interseca l'asse x nei punti di ascissa:
$solve(f(x)=0, \{x\})$

$$\left\{x=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right\}, \left\{x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right\} \qquad \textbf{(2.5)}$$

e l'asse y nei punti di ordinata:
$solve(y=f(0), \{y\})$

$$\{y=-1\} \qquad \textbf{(2.6)}$$

Il vertice della parabola è il punto di minimo della funzione f:
$solve(diff(f(x), x)=0)$

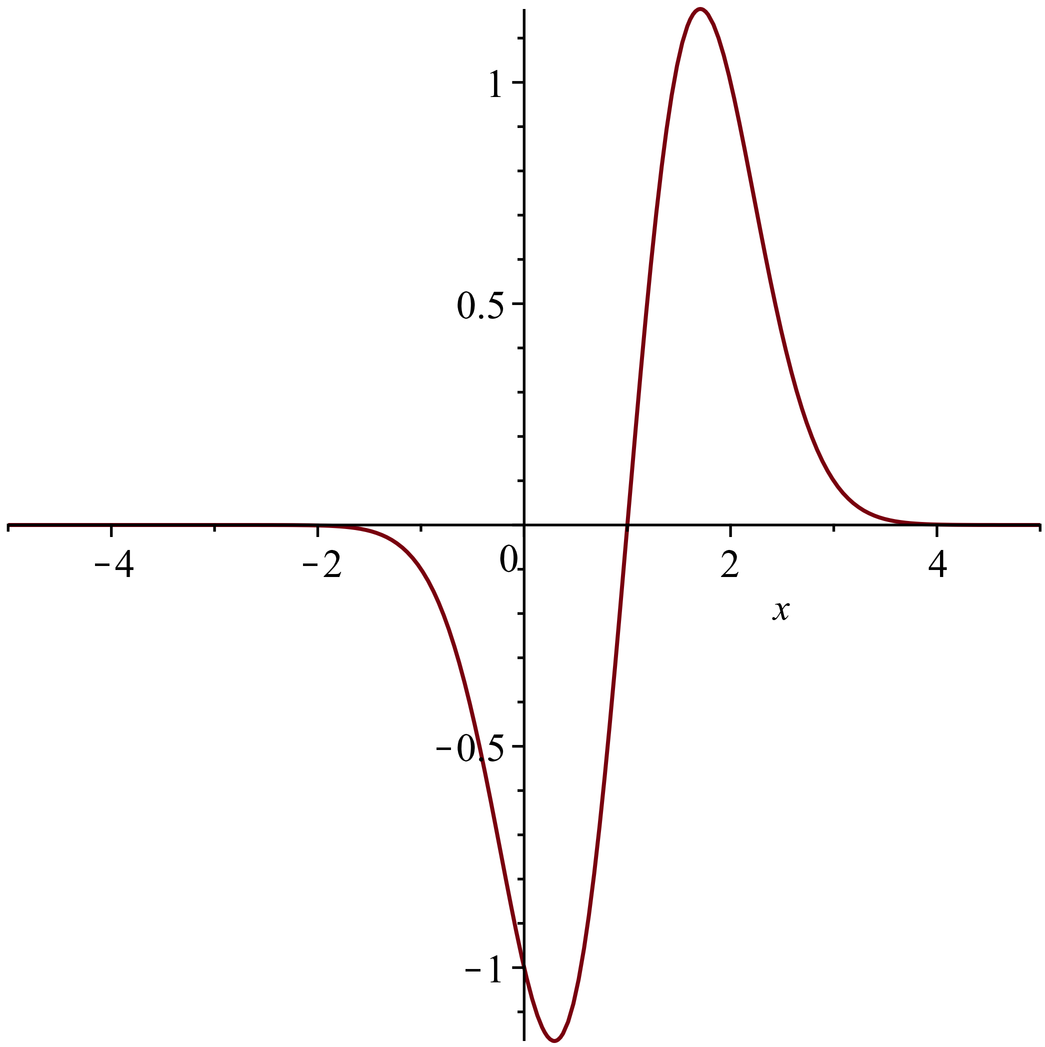
$$\frac{1}{2} \qquad \textbf{(2.7)}$$

$f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$-\frac{5}{4} \tag{2.8}$$

La parabola ha quindi vertice nel punto $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$.

Disegnamo la funzione g.



Dal punto precedente sappiamo già che la funzione ha per asintoto orizzontale la retta $x = 0$.
Calcoliamo le coordinate dei punti di massimo e minimo:
$solve(diff(g(x), x) = 0, \{x\})$

$$\left\{x = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}, \left\{x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right\} \tag{2.9}$$

$simplify\left(g\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\, e^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

$simplify\left(g\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{2}} \tag{2.11}$$

Quindi abbiamo che i punti di massimo e minimo sono $MAX\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{2}}}{2}\right)$ e $MIN\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{2}}}{2}\right)$.

La derivata seconda della funzione g è:

$simplify(diff(g(x), x, x))$

$$2\,e^{-x(x-2)}\left(2x^3-6x^2+3x+1\right) \tag{2.12}$$

e troviamo i punti di flesso ponendola uguale a zero:

$solve(\mathbf{??(2.12)} = 0, \{x\})$

$$\{x=1\}, \left\{x=1-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right\}, \left\{x=1+\frac{1}{2}\sqrt{6}\right\} \tag{2.13}$$

$g(1)$

$$0 \tag{2.14}$$

$simplify\left(g\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{6}\,e^{-\frac{1}{2}} \tag{2.15}$$

$simplify\left(g\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{6}\,e^{-\frac{1}{2}} \tag{2.16}$$

I punti di flesso della funzione g sono: $F_1(1, 0)$, $F_2\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}\,e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)$ e $F_3\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}\,e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)$.

Osserviamo che sia i punti di massimo e minimo che i punti di flesso sono simmetrici rispetto al punto F_1. Questo ci suggerisce che la funzione g potrebbe essere simmetrica rispetto ad F_1. Per verificarlo dobbiamo controllare che valga la proprietà $g(x) = -g(-x+2)$, applicando la simmetria $\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = -y \end{cases}$.

$-g(-x+2)$

$$-(-x+1)\,e^{-2x+4-(-x+2)^2} \tag{2.17}$$

e ricordiamo che

$g(x)$

$$(x-1)\,e^{-x^2+2x} \tag{2.18}$$

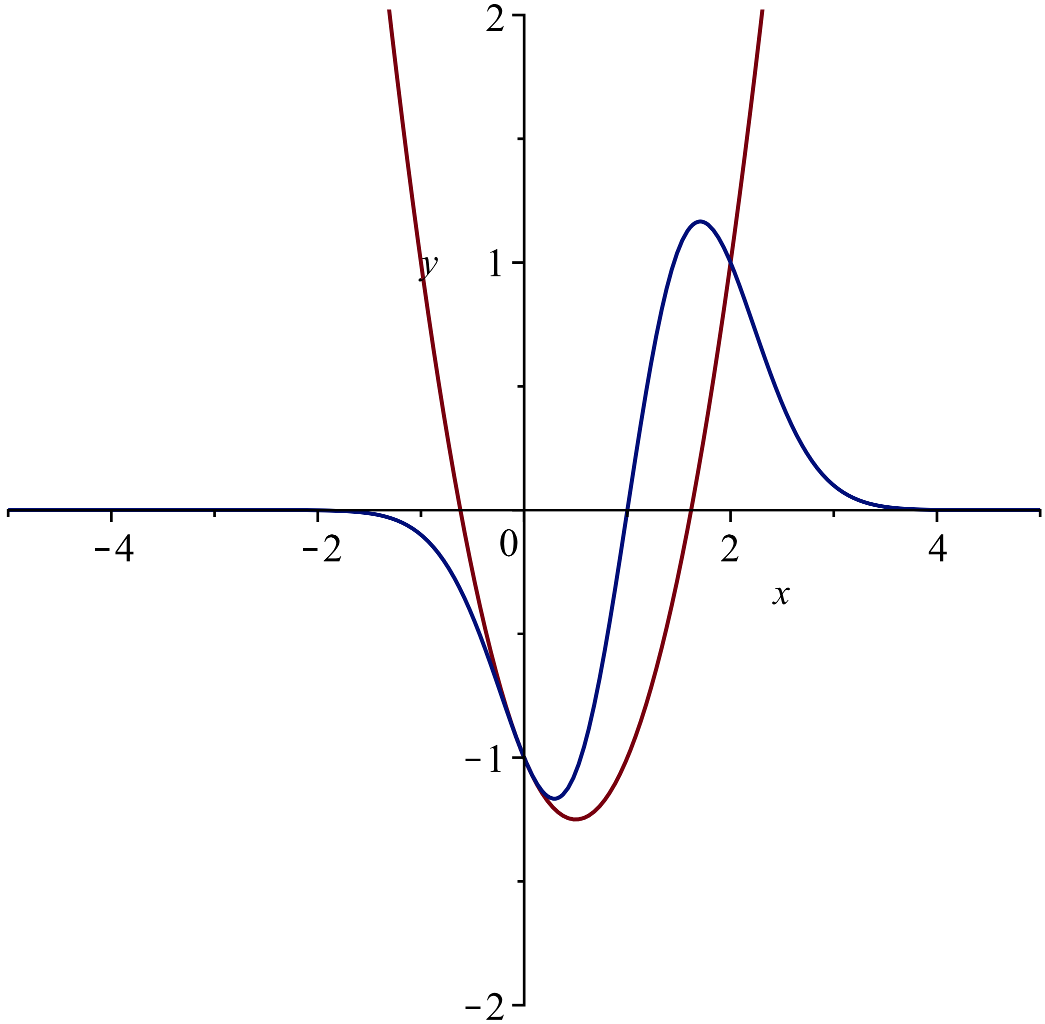
Verifichiamo che l'uguaglianza sia vera:

$verify(simplify(??(2.17)), simplify((2.18)??))$

$$true \tag{2.19}$$

Abbiamo quindi ottenuto che la funzione g è simmetrica con centro $F_1(1, 0)$.

Tracciano il grafico delle due funzioni notiamo che potrebbero essere tangenti nel punto $B(0, -1)$.



Verifichiamo che B, attraverso cui entrambe le funzioni f e g passano, è effettivamente il punto di tangenza, determinando le rette tangenti ai due grafici di funzioni e verificando che coincidono. Valutiamo entrambe le derivate nel punto $x = 0$ per trovare la pendenza della retta tangente. Se questa risulta essere uguale allora le due rette coincidono.

$m_f := eval(diff(f(x), x), x = 0)$

$$m_f := -1 \tag{2.20}$$

$m_g := eval(diff(g(x), x), x = 0)$

$$m_g := -1 \tag{2.21}$$

La retta tangente ha quindi equazione: $y = -x - 1$.

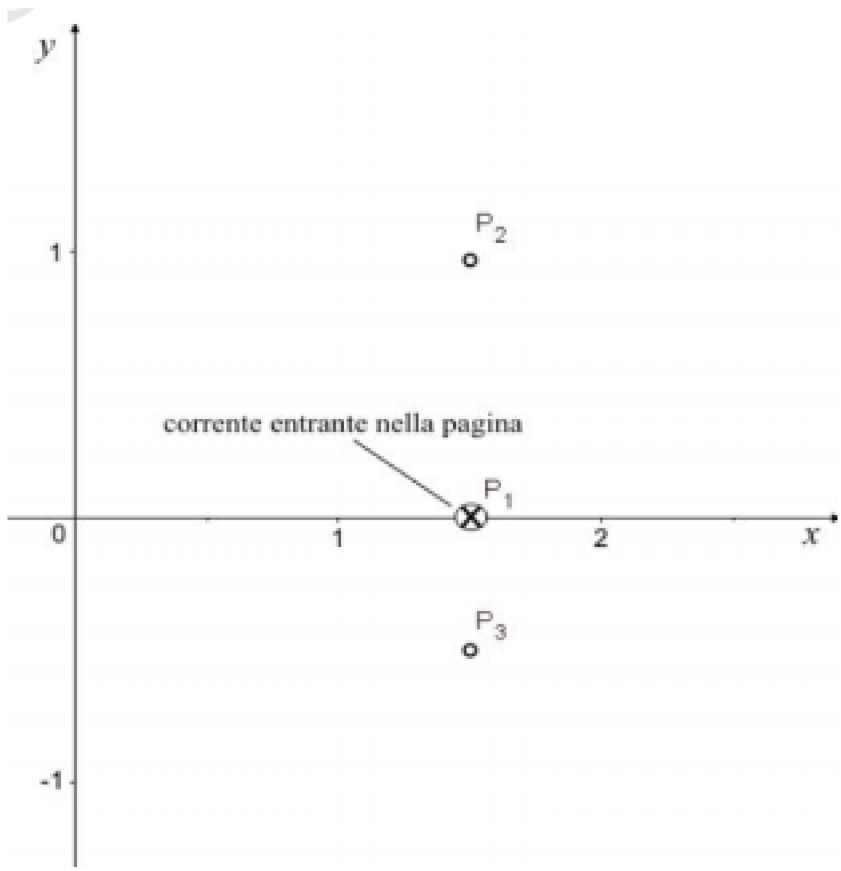
Per determinare l'area della regione di piano delimitata dai grafici di f e g dobbiamo calcolare l'integrale $\int_0^2 [g(x) - f(x)]\, dx$.

$int(g(x) - f(x), x = 0..2)$

$$\frac{4}{3} \tag{2.22}$$

L'area di tale regione è quindi $\frac{4}{3}$.

3. Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti: $P_1 = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $P_2 = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$ e $P_3 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
   I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2.0\ A$, i_2 e i_3. Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.
   Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1, i_2 e i_3, lungo il contorno di S, a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3.



Soluzione

Per calcolare la circuitazione del campo magnetico $\Gamma(B)$ generato dalle tra correnti i_1, i_2 e i_3, lungo il perimetro γ di B, possiamo utilizzare il Teorema della circuitazione di Ampère: $\Gamma_\gamma(B) = \mu_0 \cdot \sum_k i_k$ dove la sommatoria è estesa alle sole correnti che attraversano la superficie S.
Verifichiamo quali correnti sono concatenate alla curva Υ, calcolando le ordinate delle funzioni f e g

per $x=\frac{3}{2}$ per poi confrontarle con le ordinate dei punti proposti.

$evalf[2]\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

$$-0.25 \tag{3.1}$$

$evalf[3]\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

$$1.06 \tag{3.2}$$

Siccome $g\left(\frac{3}{2}\right) > 1$ la corrente i_2 attraversa la superficie, mentre siccome $f\left(\frac{3}{2}\right) > -\frac{1}{2}$ la corrente i_3 non attraversa S.

La circuitazione è data perciò da $\Gamma_\gamma(B)=\mu_0(i_1+i_2)$.

Stabiliamo l'orientazione di γ in senso orario, quindi la corrente i_1 entrante risulta positiva.

Quindi possiamo dire che:

- se il verso di i_2 è entrante nel foglio $\Gamma_\gamma(B)=\mu_0(2.0+i_2)$.
- se il verso di i_2 è uscente nel foglio $\Gamma_\gamma(B)=\mu_0(2.0-i_2)$.

4. Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R=0,20\ \Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B=1,5\cdot 10^{-2}\ T$ perpendicolare alla regione S. Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intesità massima è pari a $5,0\ mA$.
   Determiare il valore di ω.

Soluzione

Facendo ruotare la spira attorno all'asse x si genera una forza elettromotrice indotta, che si può calcolare utilizzando la legge di Faraday-Neumann-Lenz: $fem=-\frac{d}{dt}\Phi_S(B)$ nella quale, se assumiamo che a $t=0$ la spira giace nel piano Oxy abbiamo che $\Phi_S(B)=B\cdot S\cdot\cos(\omega\cdot t)$

Calcoliamo quindi:

$fem := -diff(B\cdot S\cdot\cos(\omega\cdot t), t)$

$$B\,S\sin(\omega\,t)\,\omega \tag{4.1}$$

La fem massima si ottiene quando $\sin(\omega\,t)=1$, quindi $fem_{max}=B\cdot S\cdot\omega$.

Sapendo dalla prima legge di Ohm ch

$fem_{max} := i_{max}\cdot R$

$$i_{max}\,R \tag{4.2}$$

e dai dati che

$i_{max} := 5.0\cdot 10^{-3}\mathrm{A}$

$$0.005000000000\ \mathrm{A} \tag{4.3}$$

$R := 0.20\Omega$

$$0.20\ \Omega \tag{4.4}$$

otteniamo che
$simplify(fem_{max})$

$$0.001000000000\ \mathrm{V} \tag{4.5}$$

Sapendo inoltre che
$B := 1.5 \cdot 10^{-2}\mathrm{T}$

$$0.01500000000\ \mathrm{T} \tag{4.6}$$

$S := \frac{4}{3}\,\mathrm{m}^2$

$$\frac{4}{3}\ \mathrm{m}^2 \tag{4.7}$$

otteniamo che
$\omega = simplify\left(\frac{fem_{max}}{B \cdot S}\right)$

$$\omega = 0.05000000000\ \frac{1}{\mathrm{s}} \tag{4.8}$$